プレスリリース

慶應義塾大学

2018 年 9 月 12 日

報道関係者各位

慶應義塾大学

世界に 1 つだけの三角形の組
－抽象現代数学を駆使して素朴な定理の証明に成功－

慶應義塾大学大学院理工学研究科 KiPAS 数論幾何グループの平川義之輔（博士課程 3 年）と松村英樹（博士課程 2 年）は、『辺の長さが全て整数となる直角三角形と二等辺三角形の組の中には、周の長さも面積も共に等しい組が（相似を除いて）たった 1 組しかない』という、これまで知られていなかった定理の証明に成功しました。

線の長さや図形の面積は、私たちの身の回りにあるものを測量する際に欠かせない基本的な「幾何学」的対象です。例えば、辺の長さが 3、4、5 の直角三角形は教科書でもおなじみの図形ですが、辺の長さが全て「整数」となる直角三角形はどのくらいあるか？という問題は、古代ギリシャ時代に研究がなされた重要な問題でした。この流れを汲んで 20 世紀に大きく発展した現代数学の一分野が「数論幾何学」です。

本研究では、数論幾何学における「p 進 Abel 積分論」と「有理点の降下法」を応用することで、冒頭の定理の証明に成功しました。高度に抽象化された現代数学において、このような身近な応用例が得られることは非常に珍しく、貴重な研究成果と言えます。

本研究成果は学術論文「A unique pair of triangles」として、米国の整数論専門誌「Journal of Number Theory」に掲載されることが決まっています（すでに 2018 年 8 月 24 日に article in press として電子版が出版されました）。

１．本研究のポイント

・辺の長さが全て整数となる三角形は古代ギリシャ時代からの研究対象だったが、本研究では新たな定理の発見、証明に成功した。
・定理の見た目が初等的であるにも関わらず、その証明には、20 世紀末に開発された比較的新しい数論幾何学の手法が用いられた。
・高度に抽象化された現代数学において、このような身近な応用例が得られることは非常に珍しく、貴重な研究成果であると言える。

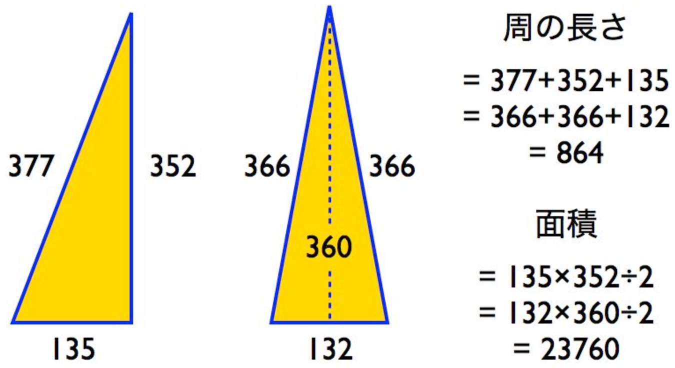
２．研究背景

線の長さや図形の面積は、私たちの身の回りにあるものを測量する際に欠かせない基本的な幾何学的対象です。例えば、辺の長さが 3、4、5 の直角三角形は教科書でもおなじみの図形ですが、『辺の長さが全て整数となる直角三角形はどのくらいあるか？』という問題は、古代ギリシャ時代に研究がなされた重要な問題でした。同様に、『辺の長さが全て整数となる直角三角形の組の中には、周の長さも面積も共に等しい組がどのくらいあるか？』という問題なども、おそらく研究されていたと思われます。

これらの問題は、全て『種数 0 の代数曲線上の有理点集合の決定』（※1、2）という問題に言い換えることができ、有理一意化と呼ばれる手法により解けることが、少なくとも座標幾何学が誕生した 17 世紀には知られていました。ところが、Fermat 方程式 x^n+y^n = 1 のように、『種数 1 以上の代数曲線上の有理点集合の決定』に帰着される問題には、現代でも統一的な解法が知られておりません。このような難問の解決に動機付けられて、20 世紀に大きく発展した現代数学の一分野が「数論幾何学」です。

３．研究内容・成果

本研究では、『辺の長さが全て整数となる直角三角形と二等辺三角形の組の中には、周の長さも面積も共に等しい組が（相似を除いて）たった 1 組しかない』という、これまで知られていなかった定理の証明に成功しました。以下が、その「たった 1 組」しかない三角形の組です。



証明の過程では、まず問題となる三角形の組を種数 2 の代数曲線でパラメタ付けすることで、元の問題を『特殊な種数 2 の代数曲線上の有理点集合の決定』という別の問題に帰着しました。このような代数曲線上には有理点が有限個しかないことが知られていますが、有理点集合を完全に決定するためにはさらに高度な技術が必要になります。

そこで、本研究では、p 進 Abel 積分論に基づいた Chabauty-Coleman 法と呼ばれる解析的な手法を用いることで、上記の代数曲線上には有理点が 10 個しかないことを証明しました。こうして得られた 10 個の有理点のうち、8 個は「辺の長さが 0 または負となる潰れた三角形の組」に対応してしまい、残りの 2 個が共に上図の三角形の組に対応します。一方、Chabauty-Coleman 法を実行する際の主な問題点は、代数曲線の Mordell-Weil rank（※3）と呼ばれる量が種数よりも小さくなければならない、というものです。本研究では、2-降下法（※4）と呼ばれるコホモロジカルな手法により Mordell-Weil rank が 1 であることを証明することで、この問題点を克服しました。

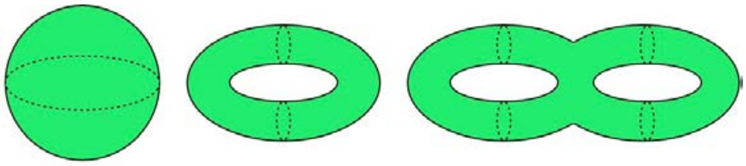
本研究で解決した問題そのものは古代ギリシャ時代にも考察されていたのではないかと思われますが、その解決に用いられた Chabauty-Coleman 法と 2-降下法は、共に 1980 年代以降に開発された比較的新しい手法です。このような素朴な問題と洗練された解決手法の対比、そして時代の大きな隔たりを伴う研究成果は、現代数学の美しさを引き立てる貴重な成果であると言えます。

＜原論文情報＞

Yoshinosuke Hirakawa and Hideki Matsumura, A unique pair of triangles, Journal of Number Theory, published online
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022314X18302269.
doi:10.1016/j.jnt.2018.07.007

＜用語説明＞

※1　代数曲線と種数：代数方程式の解集合として定まる図形を代数多様体と呼び、特に 1 次元の図形を代数曲線と呼ぶ。例えば、xy−平面内の直線：y = x、円周：x^2+y^2 = 1、放物線：y = x^2、双曲線：x^2 = y^2+1 などは、全て代数曲線である。一方、方程式の複素数解集合から定まる代数曲線は、浮き輪がいくつか連結した図形と同一視できる。（曲線という名前に反して曲面と見なせる。）この浮き輪の数が種数である。例えば、上述の直線、円周、放物線、双曲線の種数は全て 0 である。一方、Fermat 方程式：x^n+y^n = 1 が定める代数曲線の種数は(n-1)(n-2)/2 である。



種数0　種数1　種数2

※2　有理点：代数多様体上の点のうち、代数方程式の有理数解に対応する点を有理点という。全ての座標が有理数となる点、と言っても良い。

※3　Mordell-Weil rank：有理点を持つ代数曲線は、Jacobi 多様体と呼ばれる高次元の代数多様体に標準的な方法で埋め込むことができる。この Jacobi 多様体の有理点集合の大きさを測る量が、Mordell-Weil rank と呼ばれる整数である。例えば、Jacobi 多様体の有理点集合が有限集合であることと、Mordell-Weil rank が 0 であることは同値である。

※4　降下法：Jacobi 多様体の Mordell-Weil rank の決定は、通常困難である。しかし、応用上はその上界（これより大きくないという値）を与えることさえできれば十分であることも多い。このような要請に基づき、コホモロジー群や Selmer 群と呼ばれる計算が容易な「入れ物」に Jacobi 多様体の有理点集合を埋め込み、その「入れ物」の大きさを計算することで Mordell-Weil rank の上界を与える手法を降下法という。

※ご取材の際には、事前に下記までご一報くださいますようお願い申し上げます。
※本リリースは文部科学記者会、科学記者会、各社科学部等に送信させていただいております。

・研究内容についてのお問い合わせ先
慶應義塾大学 理工学部 KiPAS 数論幾何グループ
研究室主催者：理工学部数理科学科教授/KiPAS 主任研究員・坂内健一（ばんない けんいち）
TEL: 045-566-1854　FAX: 045-566-1854　E-mail: agnt@math.keio.ac.jp

・本リリースの配信元
慶應義塾広報室（村上）
TEL：03-5427-1541　FAX：03-5441-7640
Email：m-pr@adst.keio.ac.jp　https://www.keio.ac.jp/