２０２５年度

慶應義塾大学入学試験問題

経済学部

数学

注意事項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いたり，裏返したりしてはいけません．
2. 数学の問題冊子は全部で16ページです．問題は 4，6，8，10，12，14 ページに印刷してあります．試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているか確認してください．ページが抜けていたり重複するページがあれば，直ちに監督者に申し出てください．
3. 解答用紙は，解答用紙Ａ（マークシート）が１枚と，解答用紙Ｂが１枚です．問題の［1］から［3］は解答用紙Ａ（マークシート）に，問題の［4］から［6］は解答用紙Ｂに解答してください．
4. 受験番号と氏名を，解答用紙Ａ（マークシート）および解答用紙Ｂのそれぞれ所定の欄に必ず記入してください．さらに，解答用紙Ａ（マークシート）には受験番号を忘れずにマークしてください．
5. 解答用紙Ａ（マークシート）への記入に先立って，解答用紙Ａ（マークシート）に記載された注意事項を読んでください．また，試験開始の合図があった後，問題冊子の２ページ目に記載された「解答用紙Ａ（マークシート）の記入に関する注意事項」を必ず読んでください．
6. 問題冊子の余白および 3，5，7，9，11，13，15，16 ページは，計算および下書きに用いてもかまいません．ただし，１ページ目には何も書いてはいけません．
7. 解答用紙Ｂの余白および裏面には何も書いてはいけません．
8. 数学の問題のうち，問題の［1］から［3］が最初に採点されます．問題の［4］から［6］は，数学の最初に採点される問題と英語の最初に採点される問題の得点が一定点に達した受験生についてのみ，採点されます．
9. 問題冊子は試験終了後必ず持ち帰ってください．

解答用紙 A（マークシート）の記入に関する注意事項

1. 問題の [1] から [3] の解答は，解答用紙A（マークシート）の解答欄にマークしてください．

   [例]　$\begin{array}{|c|c|}\hline (11) & (12) \\ \hline\end{array}$ と表示のある問いに対して，「45」と解答する場合は，右の例のように解答欄 (11) の $\boxed{4}$ と解答欄 (12) の $\boxed{5}$ にマークしてください．

   なお，解答欄にある $\boxed{-}$ はマイナスの符号 − を意味します．

(11)	(12)
1	1
2	2
3	3
■	4
5	■
6	6
7	7
8	8
9	9
0	0
−	−

2. 解答欄 (1), (2), $\cdots$ の一つ一つは，それぞれ0から9までの数字，またはマイナスの符号 − のいずれか一つに対応します．それらを (1), (2), $\cdots$ で示された解答欄にマークしてください．

   下の例のように，数字は右によせて表示し，マイナスの符号 − は左端に置いてください．空のマスがあれば0を補ってください．分数の分母と分子がともに解答欄のときは，分母を正で，約分しきった形で解答してください．

   [例]

$$3 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array} \qquad\qquad 0 \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

$$3 \longrightarrow \frac{3}{1} \longrightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}}$$

$$x-y \longrightarrow 1x+(-1)y \longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}\, x + \begin{array}{|c|c|}\hline - & 1 \\ \hline\end{array}\, y$$

$$-\frac{4}{6} \longrightarrow \frac{-2}{3} \longrightarrow \frac{\begin{array}{|c|c|}\hline - & 2 \\ \hline\end{array}}{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 3 \\ \hline\end{array}}$$

計 算 用 紙

[1] 以下の問いに答えよ．

(1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ とする．座標平面上の 4 点 O, A, B, C を，$\mathrm{O}\left(0,0\right)$, $\mathrm{A}\left(5,0\right)$, $\mathrm{B}\left(5\cos\alpha, 5\sin\alpha\right)$, $\mathrm{C}\left(5\cos 3\alpha, 5\sin 3\alpha\right)$ とする．

(a) △OAB の面積は $\dfrac{\boxed{(1)}\boxed{(2)}}{\boxed{(3)}}$, 辺 AB の長さは $\sqrt{\boxed{(4)}\boxed{(5)}}$ である．

(b) △OBC の面積は $\boxed{(6)}\boxed{(7)}$, 辺 BC の長さは $\boxed{(8)}$ である．

(c) 線分 AC の長さは $\dfrac{\boxed{(9)}\boxed{(10)}}{\boxed{(11)}}\sqrt{\boxed{(12)}\boxed{(13)}}$ である．

(2) 不等式

$$|m+n-6| + |m-n-2| \leqq 6 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

を満たす整数 m, n を考える．$(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき，m と n が不等式 ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{(14)} \leqq m \leqq \boxed{(15)}$$

である．同様に，$(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき，m と n が ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{(16)}\boxed{(17)} \leqq n \leqq \boxed{(18)}$$

である．よって，m と n が ① を満たすとき，$(m-n)(m+n-6)$ の最大値は，

$$(m-n)(m+n-6) = \left(m - \boxed{(19)}\right)^2 - \left(n - \boxed{(20)}\right)^2$$

より $\boxed{(21)}\boxed{(22)}$ である．

計 算 用 紙

[2] 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおくとき,

$$T_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つとする．ただし，$0! = 1$ である．

(1) $a_1 = \dfrac{\boxed{(23)}}{\boxed{(24)}\boxed{(25)}}$, $a_2 = \dfrac{\boxed{(26)}}{\boxed{(27)}}$ である．

(2) $n \geqq 2$ に対して $T_n - T_{n-1} = \boxed{(28)}\,n - \boxed{(29)}$ が成り立つから,

$$a_n = r^n \frac{n - \boxed{(30)}}{(n+s)(n+t)(n+u)} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

である．ただし，ここに $r = \boxed{(31)}$ であり，$s < t < u$ として $s = \boxed{(32)}$, $t = \boxed{(33)}$, $u = \boxed{(34)}$ である．

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおく．$k \geqq 2$ に対して

$$a_k = \frac{1}{\boxed{(35)}} \left\{ \frac{r^{k+1}}{(k+1)\left(k + \boxed{(36)}\right)} - \frac{r^k}{(k+1)\left(k + \boxed{(37)}\right)} \right\}$$

が成り立つから,

$$S_n = -\frac{\boxed{(38)}\boxed{(39)}}{\boxed{(40)}\boxed{(41)}} + \frac{r^{n+1}}{\boxed{(42)}\,(n+p)(n+q)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

である．ただし，ここに $p < q$ として $p = \boxed{(43)}$, $q = \boxed{(44)}$ である．

計　算　用　紙

[3] 2枚の硬貨を同時に投げることを試行という．各回の試行において，座標平面上の点Pは次の(A), (B), (C)に従って座標平面上を移動する．

(A) 点Pが$\left(x,y\right)$にあるとき，表が2枚出れば$\left(x+1,y+\sqrt{3}\right)$に移動する．

(B) 点Pが$\left(x,y\right)$にあるとき，裏が2枚出れば$\left(x+1,y-\sqrt{3}\right)$に移動する．

(C) 点Pが$\left(x,y\right)$にあるとき，表と裏が1枚ずつ出れば$\left(x-2,y\right)$に移動する．

例えば，点Pが$\left(1,\sqrt{3}\right)$にあるとき，裏が2枚出れば，点Pは$\left(2,0\right)$に移動する．

(1) 1回目の試行前に原点にある点Pが，3回目の試行後に原点にある確率は

$$\frac{\boxed{(45)}}{\boxed{(46)}\boxed{(47)}}$$ である．

(2) 1回目の試行前に原点にある点Pが，3回目の試行後にy軸上にある確率は

$$\frac{\boxed{(48)}}{\boxed{(49)}}$$ である．

(3) 1回目の試行前に原点にある点Pが，5回目の試行後にx軸上にある確率は

$$\frac{\boxed{(50)}\boxed{(51)}}{\boxed{(52)}\boxed{(53)}\boxed{(54)}}$$ である．

(4) 1回目の試行前に原点にある点Pが5回目の試行後にx軸上にあるとき，8回目の試行後に円$x^2+y^2=4$上にある条件付き確率は$\dfrac{\boxed{(55)}\boxed{(56)}}{\boxed{(57)}\boxed{(58)}\boxed{(59)}}$である．

計 算 用 紙

[4] p を正の実数，m を自然数とし，曲線 $y=-x^2$ 上の点 $\left(-p,-p^2\right)$ における接線と直線 $y=2m$ の交点を P_m とする．P_m の x 座標が 1 以下となる m の最大値を N とする．

(1) P_m の x 座標を，p と m を用いて表せ．

(2) $N=40$ が成り立つ p の範囲を求めよ．

以下，n を自然数とし，$a=3n\log_3 6-\log_3 2+n$ とする．

(3) 3^a は 2 以上の自然数である．3^a の素因数分解を，n を用いて書け．

(4) $p=3^a$ のとき，$N<2^{1000}$ となる自然数 n の最大値を求めよ．なお，必要があれば $1.58<\log_2 3<1.59$ を用いよ．

計 算 用 紙

[5] 座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面を C，点 M$\left(4, 0, 0\right)$ を中心とする半径 2 の球面を D とする．

(1) p, q を実数とする．xy 平面上の直線 $y = px + q$ は，球面 C と xy 平面が交わってできる円と点 $\mathrm{A_1}$ で接し，球面 D と xy 平面が交わってできる円と点 $\mathrm{A_2}$ で接し，かつ，$0 < p < 1$ を満たすとする．p と q の値を求めよ．

(2) r, s を実数とする．zx 平面上の直線 $z = rx + s$ は，球面 C と zx 平面が交わってできる円と点 $\mathrm{B_1}$ で接し，球面 D と zx 平面が交わってできる円と点 $\mathrm{B_2}$ で接し，かつ，$r < -1$ を満たすとする．r と s の値を求めよ．

以下，点 E は $\overrightarrow{\mathrm{A_1E}} = (0, 0, 1)$ を満たすとし，3 点 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, E を通る平面を α とする．また，点 F は $\overrightarrow{\mathrm{B_1F}} = (0, 1, 0)$ を満たすとし，3 点 $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, F を通る平面を β とする．α と β が交わってできる直線を ℓ とし，ℓ と xy 平面の交点を G，ℓ と zx 平面の交点を H とする．

(3) G の座標を求めよ．

(4) ℓ 上の点 T を，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ と表す．$\triangle$OMT の面積が最小となる t の値を求めよ．

計 算 用 紙

[6] C を $y=3x^2$ で定まる曲線とし，C 上に異なる 2 点 $\mathrm{A}\left(a, 3a^2\right)$, $\mathrm{B}\left(b, 3b^2\right)$ をとる．ただし，$a<b$ とする．

(1) C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S を，a と b を用いて表せ．ただし，積分を用いて計算し，解答欄には積分の計算過程も書くこと．

(2) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき，**(1)** で求めた面積 S の取りうる値の最大値 T を求めよ．

(3) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき，直線 AB は点 $(0, 7)$ を通らないことを示せ．

計 算 用 紙

計 算 用 紙