



2025年度

慶應義塾大学入学試験問題

理工学部

数 学

- 注 意
1. 氏名と受験番号は、解答用紙の所定の欄に必ず記入しなさい。
 2. 解答は、解答用紙の所定の欄に、読みやすいように、ていねいに記入しなさい。
 3. 解答用紙の余白および裏面には、何も書いてはいけません。
 4. 問題冊子は12ページからなります。5～8ページおよび11, 12ページは余白です。
 5. 問題冊子の余白は、計算および下書きに使用してもかまいません。
 6. 問題冊子は必ず持ち帰ってください。

注意 問題1, 2, 3, 4, 5の解答を, 解答用紙の所定の欄に記入しなさい。空欄(ア)～(フ)については, 分数は既約分数にするなど最もふさわしいもの(数, 式など)を解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1

- (1) 複素数平面上で, 方程式 $|z+i|=2|z-\sqrt{3}|$ を満たす点 z 全体が表す図形は, 中心が , 半径が の円である。
- (2) n を自然数とする。1 から n までの自然数の中で6または8または9で割り切れるものの個数を a_n で表す。このとき, $a_{30} = \text{$ となる。また, $a_n = 1000$ を満たす最大の n は である。
- (3) $f(x)$ を微分可能な関数とし, $g(x) = x^3 + x$ とする。関数 $g(x)$ は微分可能な逆関数 $g^{-1}(x)$ をもつ。定数 t に対して, 関数 $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$ は $x = t^3 + t$ で極値をとるとする。このとき, $f'(t)$ を t の多項式で表すと $f'(t) = \text{$ となる。次に, 任意の定数 t に対して, 関数 $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$ は $x = t^3 + t$ で極値をとるとする。このとき, $f(0) = -2$ ならば $f(1) = \text{$ である。

2

座標平面上の点 $P(1, 1)$ と点 $Q(1, -1)$ および曲線

$$C: y = \frac{1}{x-4} \quad (x > 4)$$

を考える。

- (1) 曲線 C の接線で点 Q を通るものは存在しないことを証明しなさい。
- (2) 曲線 C の接線で点 P を通るものを l とし、 C と l の接点を A とする。このとき、 l の方程式は $y = \boxed{\text{(キ)}}$ であり、点 A の座標は $\boxed{\text{(ク)}}$ である。また、曲線 C 上の点 B が

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}$$

を満たすとき、点 B の座標は $\boxed{\text{(ケ)}}$ である。

- (3) A, B を (2) で定めた点とする。正の数 t に対し、曲線 C 上の点 $R\left(t+4, \frac{1}{t}\right)$ は点 A と異なるものとする。線分 AR を $2:1$ に内分する点を S とし、線分 BS を $3:2$ に内分する点を $T(u, v)$ とするとき、 u を t の式で表すと $u = \boxed{\text{(コ)}}$ である。また、 uv の値は $t = \boxed{\text{(サ)}}$ のとき最小となる。

3

点 P, Q を数直線の原点におき, 1 個のさいころを投げて出た目に応じて P, Q を動かす。偶数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ動かし, 5 または 6 の目が出たときは Q を正の向きに 1 だけ動かし, 6 の目が出たときは P, Q をともに正の向きに 1 だけ動かし, P と Q の距離が初めて 2 となるまでさいころを投げ続けることとし, P と Q の距離が 2 になったら, それ以降はさいころを投げない。n 回さいころを投げて P と Q の距離が 2 となる確率を p_n とする。

(1) $p_2 = \boxed{\text{(シ)}}$ である。

(2) n 回さいころを投げて, P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を x_n , P と Q が同じ位置にある確率を y_n , Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を z_n とすると

$$y_{n+1} = \boxed{\text{(ス)}} x_n + \boxed{\text{(セ)}} y_n + \boxed{\text{(ソ)}} z_n$$

という関係式が成立する。また, $x_n = \boxed{\text{(タ)}} z_n$ が成り立つ。ただし, $\boxed{\text{(ス)}} \sim \boxed{\text{(タ)}}$ には数を記入すること。

(3) 関係式

$$z_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \beta (z_n + \alpha y_n)$$

を満たす定数の組 (α, β) は, $\boxed{\text{(チ)}}$ と $\boxed{\text{(ツ)}}$ の 2 組ある。

(4) p_n を n を用いて表すと $p_n = \boxed{\text{(テ)}}$ となる。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

4

以下の設問では、区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して、区間 $[a, b]$ で $f(x) \leq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ であること、および $\left| \int_a^b h(x) dx \right| \leq \int_a^b |h(x)| dx$ であることをことわりなしに用いてよい。

(1) 自然数 n に対して $I_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} dx$ とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \boxed{\text{(ト)}}$ である。

(2) 自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{3}{2}}$ とする。すべての n に対して不等式

$$S_n < 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

を証明しなさい。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 5x dx = \boxed{\text{(ナ)}}$ である。

(4) k を自然数とすると、 $\int_0^{2\pi} |\sin kx| dx = \boxed{\text{(ニ)}}$ である。

(5) $f(x)$ を微分可能な関数とし、 M を正の定数とする。区間 $[0, 2\pi]$ で、 $f'(x)$ は連続かつ $|f'(x)| \leq M$ と仮定する。自然数 k, n に対して、 $a_k = \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$ とし、 $T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|^{\frac{3}{2}}$ とする。このとき、すべての n に対して不等式

$$T_n < 23M^{\frac{3}{2}}$$

を証明しなさい。ただし、必要であれば(2)の不等式と(4)の等式を証明なしに用いてよい。

5

座標平面上に3点 $A(x, 0)$, $B(x, y)$, $C(0, y)$ をとる。ただし, B は単位円周上を動き, $x > 0, y > 0$ である。このとき, 線分 AB と BC の長さが等しくなる x の値は $x =$ である。

次に, n を2以上の整数とし, $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して $x = \frac{k}{n}$ のときの線分 AB と BC の短い方の長さを $L_n(k)$ と表す。 $n = 4$ とすると, $L_4(k)$ ($k = 1, 2, 3$) の最大値は である。一方, $n = 5$ のとき $L_5(k)$ が最大となる k の値は と の2個ある。同様に, 2以上の整数 a で, $L_a(k)$ が最大となる k の値が2個あるものを考え, そのような k のうち大きい方の値を m とおく。このとき, m を a の式で表すと $m =$ となる。また, $b = 3a + 4m - 2$ とおいたとき, $L_b(k)$ が最大となる k の値も2個あり, それらの大きい方を a と m の1次式で表すと となる。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。

このページは余白です。計算および下書きに使用してもかまいません。