

慶應義塾大学経済学部研究プロジェクト

最終成果論文（2013年度）

# 業種間の異質性を考慮した企業格付評価

—階層ベイズモデルによる分析—

経済学部 4年

小池泰貴

(指導教員：中妻照雄教授)

## 目次

|     |                         |    |
|-----|-------------------------|----|
| 1   | 序論                      | 2  |
| 2   | モデル及び推計方法について           | 4  |
| 2.1 | ベイズ統計学における未知パラメーターの推計方法 | 4  |
| 2.2 | 階層ベイズモデルとは              | 5  |
| 2.3 | 順序プロビットモデル              | 6  |
| 2.4 | 変量効果順序プロビットモデル          | 8  |
| 2.5 | ランダム係数順序プロビットモデル        | 11 |
| 3   | 実証分析                    | 13 |
| 3.1 | データ                     | 13 |
| 3.2 | モデルの評価基準                | 14 |
| 3.3 | 順序プロビットモデルの推定           | 15 |
| 3.4 | 変量効果順序プロビットモデルの推定       | 16 |
| 3.5 | ランダム係数順序プロビットモデルの推定     | 18 |
| 3.6 | 標本外予測に関する当てはまりの比較       | 20 |
| 4   | 結論                      | 23 |

## 1 序論

本稿の目的は、業種間の異質性を考慮した企業格付予測モデルをベイズ統計に基づく手法で推定し、その有効性を検証することである。

頻度主義に立脚した頻度主義統計学に対し、20世紀中葉以降ベイズ統計学の注目が高まりはじめた。しかし、その数学的な煩雑さに加え計算過程で多重積分を要求するという数値計算上の大きな障害も相まって、その普及が妨げられてきた。このような問題は、1990年代に入ってマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法がベイズ統計学に用いられるようになったことで事実上解消されたといえる。これによりベイズ統計学の利点を享受できるようになり、文理を問わずその普及、応用が進んでいる。特に、経済学においてよく用いられる実際に観測されない潜在変数を含むモデルの推定に際し威力を発揮し、応用研究の報告は後を絶たない。

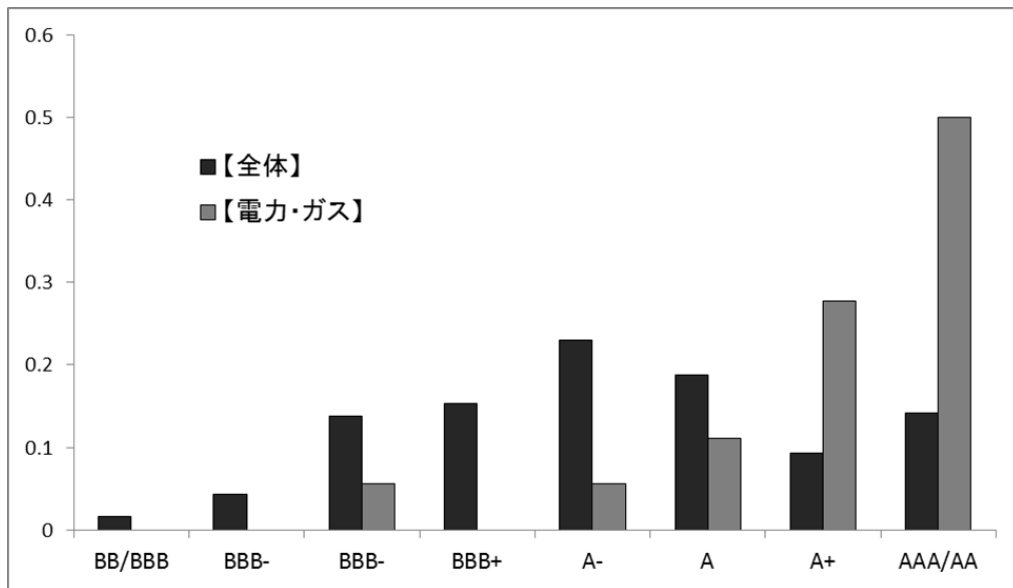
本稿では、このようなベイズ手法を発行体企業の格付問題に応用する。発行体格付とは、発行体が負う、社債をはじめとした金融債務についての総合的な債務履行能力をランク付けしたものである。格付機関は、格付のランクに加えて格付ごとのデフォルト率も発表しており、金融機関のリスク管理において重要な役割を果たしているものである。一方、被格付け企業にとっては自社の資金調達金利に影響を与えるので、財務管理面で欠かせない情報であるといえる。

しかし、このように企業格付は債務者、債権者双方に重要な指標であるにも関わらず、スタンダード・アンド・プアーズ、Moody'sといった海外の格付会社から格付投資情報センターやR & Iといった日本の格付会社まで、参考基準こそ公開されているものの、その決定メカニズムは非公開とされている。そのため、実務上の強い要請のもと、様々な研究報告がなされてきた。格付の決定要因を分析する研究は、Horrigan(1966)、等に見られるように古くは回帰モデルが利用されてきたが、格付の離散データという性質上単純な回帰モデルは適さない。そこで、Kaplan and Urwitz(1979)が格付データに対して順序プロビットモデルの適用を行った。順序プロビットモデルとは順序付けされた複数のカテゴリのいずれかに分析対象が属するかを判定するモデルである。具体的には、データから計算される単一の潜在変数の値を判別の尺度とし、この値を推定された閾値と比較することで各カテゴリ間の分類が行われるものである。以降も、Ederington,(1985),Terza(1985),中山・森平(1998)といった、順序モデルを使用した研究が報告されてきたが、順序プロビットモデルの平行性の仮定-回帰パラメーターが順序性のあるカテゴリに依存せず、常に一定であるような仮定-に対する批判から、多項プロビットといった別種のモデルを使用する場合も多い。例えば小林(2001)では、格付機関が上位格付と下位格付を下す際の判断基準が異なることを指摘し、単一の潜在変数を使って全ての格付を判断する順序プロビットモデルは適当でないとし、各カテゴリごとに異なる潜在変数を想定する多項プロビットモデルの方が妥当であることを示している。その後も、安川(2002)等が、順序プロビットモデルの仮定が成立していないことを指摘している。

しかし、草場(2011)が指摘するように、格付機関の実際の格付過程を想起すると、そもそも様々な属性を有する企業に対し、画一的な財務指標を用いて格付が行われている可能性は低く、もしそうであれば画一的な財務指標を説明変数とするモデルを用いて平行性の仮定を議論するより、む

しる様々な業種の異質性を考慮したモデルを構築する方が有益であろう。以下の図は日本企業の格付データに関し、電力・ガス業の格付の経験分布と業種全体の経験分布を示したものである。なお、格付 AA-以上を「AAA/AA」として、BB+ 以下の格付を「BBB/BB」としてまとめている。データについての詳細は 3.1 を参照されたい。

図1 電力・ガス業と全体の格付経験分布



日本格付研究所 (JCR)、格付投資情報センター (R & I)HP より筆者作成

全体をプールした分布に比べ、電力・ガス業の分布は明らかに右寄りになっており、格付の傾向に無視しがたい差があることが確認できる。このような問題意識の下、草場 (2011) では自己資本の量で規模をセグメントして別々のモデルを推計している。しかし、サンプルサイズを一定水準に保つという制約から、「製造業」、「非製造業」という大まかな分類をするにとどまっており、業種間の異質性が十分に考慮されているとは言い難い。そこで本稿では同様の問題意識の上で、業種の異質性をより精緻に考慮するべく、階層ベイズモデルを用いて分析を行った。一般に、標本を分割すると、各分割において十分な標本の数を得られないという問題が生じる。その点、階層ベイズモデルでは業種間の異質性を考慮しつつも、共通の要素があると仮定するので、全業種の全体傾向を加味した上でその傾向から個別に乖離した部分を異質性として扱うことができる。そのため標本全体を個別の係数の推計にも反映され係数が安定し、標本数の低下問題にも対処が可能となる。

以上の議論を踏まえ以下の分析を行った。通常の順序プロビットモデルをベンチマークとし、2種類の階層ベイズモデル—定数項のみを階層化したモデルを「変量効果順序プロビットモデル」、全ての切片を階層化したモデルを「ランダム係数順序プロビットモデル」—としてそれぞれベイズ推計した。その結果、両モデルともデータへの当てはまりはベンチマークのそれを上回ったものの、前者の方が後者の当てはまりを上回るという結果になった。さらに標本外予測についても、その予測精度はベンチマークより階層モデルの方が良好であることが確認された。この結果は、格付予測モデルの構築にあたり業種間の異質性を組み込むことの重要性を示唆しているといえる。

## 2 モデル及び推計方法について

本章ではベイズ統計学及び MCMC 法の一般論を概説した後、中妻 (2003)、Koop, Dale, and Justin(2007) 等に従い、本稿で使用する格付推定のモデルである順序プロビットモデル、及びそれを拡張した 2 種類の階層モデル：定数項のみを階層化したモデル、全ての切片を階層化したモデルを導出する。同モデルにおいてベイズ推定を行う場合、複雑な多重積分を計算する必要があるため、パラメーターの周辺事後分布を解析的に導出するのは困難である。このような困難を解消するために使用されるのが、本章で説明する MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ法) である。以後、本稿で分析に用いるモデルを導出する。また同時に、それらのモデルを MCMC 法を用いてベイズ推計するための具体的な手順についても確認していく。

### 2.1 ベイズ統計学における未知パラメーターの推計方法

モデルの導出の前に、ベイズ統計学におけるモデルの未知のパラメーター推定をする際の考え方、またその計算方法であるマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法について概説する。ベイズ統計学とは、未知のパラメーターについて、不確実な現象の背後にある確率分布の関数形を想定した上で、観測されたデータを加味して推論を行う手法である。通常の頻度主義統計学におけるパラメーター推定では、未知のパラメーターはその真の値が非確率的な変数として与えられ、確率的と想定されるものは推定に用いられる統計量を構成するデータである。一方、ベイズ統計学においては未知のパラメーターを確率変数とみなし、観測されたデータが与えられた下でのパラメーターの条件付き確率分布を用いて、統計的な推論が行われることになる。以上の推論の手続きは、以下に示すベイズの定理に従って行われる。

$$\underbrace{p(\theta|Data)}_{\text{事後分布}} \propto \underbrace{p(Data|\theta)}_{\text{尤度}} \underbrace{p(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

これはすなわち、分析者が事前に想定していた事前分布 (Prior Distribution) が、データ (Likelihood) によって更新され、事後分布 (Posterior Distribution) が導かれることを示している。なお、事後分布を実際の推論に使用するためには、確率分布としての意味を成すための基準化定数

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(Data|\theta)p(\theta)d\theta$$

を計算する必要があり、推論する対象の未知パラメーターが例えば  $k$  個であった場合、 $k$  回の多重積分を評価する必要がある。しかし、限られた場合を除いてはこの値を解析的に求めることは困難である。また、数値計算上でも様々な問題があることが知られている。そこでこの問題を解消するために用いられるのがマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法である。MCMC 法とは、マルコフ連鎖の性質をうまく利用して任意の確率分布から乱数を生成する方法の総称であり、現在はベイズ統計において標準的な計算手法の地位を確立している。MCMC 法を使用すれば、分布系が不明な事後分布から乱数を発生させることができるため、その乱数を用いて様々な分析を行うことが可

能になる。詳細は省くが、MCMC 法ではある初期値から、一回前に発生させた乱数に依存させる形で乱数を発生させるというプロセスを繰り返すことで確率分布を更新していく。特定の確率分布に到達すると、それが不変になる場合があり、これを不変分布という。MCMC 法では、この不変分布が事後分布になるように、乱数の発生方法を工夫する。これにより、一度不変分布に収束すると、その後に発生した乱数を事後分布から得られた乱数列としてみなすことができ、これを用いて各種の推論を行うことが可能になる。なお、MCMC 法では、乱数発生後の初期値の影響を大きく受けると想定される前半部分を捨て、残りの乱数列のみを用いて推論を行うことが多い。このプロセスはバーンインと呼ばれる。<sup>\*1</sup>

本稿では、この MCMC 法的一种であるギブス・サンプラーと呼ばれる手法を用いる。説明のために 2 変数のパラメーターにおけるギブス・サンプラーの適用を考えてみよう。2 変数の同時確率分布を  $f(\theta_1, \theta_2)$  とする。この分布から、同時に 2 変数を生成することはできないが、条件付確率分布  $f(\theta_1|\theta_2)$ 、 $f(\theta_2|\theta_1)$  からはそれぞれ  $\theta_1$  と  $\theta_2$  を生成できるとする。 $\theta$  の初期値を  $\theta_1^{(0)}$ 、 $\theta_2^{(0)}$  とし、 $r$  番目の乱数を  $\theta_1^{(r)}$ 、 $\theta_2^{(r)}$  と定義すると、2 変数の同時確率分布に対するギブス・サンプラーは以下のように定義される。

2 変数の同時確率分布のギブス・サンプラー

$$\begin{aligned} \text{Step1. } \theta_1^{(r)} &\leftarrow f(\theta_1|\theta_2^{(r-1)}) \\ \text{Step2. } \theta_2^{(r)} &\leftarrow f(\theta_2|\theta_1^{(r)}) \end{aligned}$$

ギブス・サンプラーは全ての変数について条件付確率が求められる場合、 $n$  変数についても拡張することが可能である。本稿で推定する順序プロビットモデルは、データ拡大法という方法を用いることで、全条件付事後分布を求めることができるので、ギブス・サンプラーを適用して事後分布から乱数を発生させ、その推論を行うことができる。

## 2.2 階層ベイズモデルとは

本節では、照井 (2010) に従い、階層ベイズモデルについて概説する。本稿で用いる階層ベイズ順序プロビットモデルは階層回帰モデルの一種と考えることができる。階層モデルでは  $K$  個の異質性を持つ集団、または個体を想定する。集団  $k$  に対するモデルのパラメーターを  $\beta_k$ 、対応するデータを  $Y_k$  とすると、誤差項が無相関の場合尤度関数は

$$\prod_{k=1}^K p(Y_k|\beta_k)$$

となる。各集団ごとにパラメーターが異なるのは、個体間にパラメーターの異質性を想定しているからであり、階層モデルでは  $\{\beta_k\}$  が共通の事前分布を持っていると仮定する。 $\{\beta_k\}$  の分布のパ

<sup>\*1</sup> マルコフ連鎖モンテカルロ法については中妻 (2007)、和合 (2005) 等に詳しいため、参考にされたい。

ラメーターを  $\theta$  とすると

$$p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K | \theta)$$

と表現される。このような事前分布を階層モデルと呼び、これに尤度関数を合わせたものを階層ベイズモデルという。階層ベイズモデルでは集団ごとの異質性を考慮しつつも、共通の要素（この場合、 $\theta$ ）があると仮定するので、集団の全体傾向を  $\theta$  で捉えつつ、その傾向から個別に乖離を許して各集団ごとの固有のパラメーター  $\{\beta_k\}$  を推計することができる。単にデータをセグメントした場合と異なり、個別の係数を標本平均に縮減して推計することができるため係数が安定し、標本数の低下問題に対処が可能となる。なお、本稿では定数項のみを階層化したモデルを「変量効果順序プロビットモデル」、全ての切片を階層化したモデルを「ランダム係数順序プロビットモデル」として区別している。

### 2.3 順序プロビットモデル

本稿の分析に用いる順序プロビットモデル、及びそのベイズ推計の方法について説明していく。そもそも、順序モデル (ordered model) とは、通常の二項モデルを拡張して個体を複数の状態に分類する方法であるが、その複数の状態に何らかの順序付けがなされている際に、対象がどの順序に分類するかという点を判別するために使用されるモデルである。企業の格付問題においては上から AAA、AA、といった具合に信用が上位の企業から順に格付がなされるであろう。このように順番の数そのものが本質的に重要な区分けを判別する際に順序モデルが用いられることになる。

ここで、J 段階の社債の格付問題（本稿では J=8）を考える。格付は低い方から高いほうに順番に並んでいるとして、最も低い場合に  $y_i = 1$ 、最も高い場合に  $y_i = J$  となるように  $y_i$  を定義しよう。定数項を含めた企業の特徴を表す変数のベクトルを  $x_i$ 、その係数のベクトルを  $\beta$  とし、誤差の潜在変数  $z_i$  を以下のように定義する。

$$z_i = x_i' \beta + \epsilon_i \quad \epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (1)$$

また、格付を判定する閾値である  $\gamma$  を以下のように定める。

$$-\infty = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_J = \infty \quad (2)$$

この時、企業 i の格付される確率は

$$\begin{aligned} p(y_i = j) &= p(\gamma_{j-1} < z_i \leq \gamma_j) \\ &= p(\gamma_{j-1} - x_i' \beta < \epsilon_i \leq \gamma_j - x_i' \beta) \\ &= \Phi(\gamma_j - x_i' \beta) - \Phi(\gamma_{j-1} - x_i' \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

である。（ここで、 $\Phi(\cdot)$  は標準正規分布の累積密度関数。）上記の順序プロビットモデルでは、 $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_M)'$  ( $M$  は定数項及び説明変数の数) 及び閾値のベクトル  $\gamma = (\gamma_2, \dots, \gamma_{J-1})$  を推計することになる。なお、順序プロビットモデルにおいては通常の頻度主義的な手法（最尤法）での推定に大きな問題はない。しかし、本稿で推定する後のモデルと比較する関係上、順序プロ

ビットモデルもベイズ的手法を用いて推定を行っていく。

以上の定式化の下で、順序プロビットモデルの尤度は

$$p(y|\beta) = \prod_{i=1}^n (\Phi(\gamma_{y_i} - x'_i\beta) - \Phi(\gamma_{y_i-1} - x'_i\beta)) \quad (4)$$

ここで、 $\beta$  の事前分布を  $N_J(\beta_0, A^{-1})$  とする。さらに潜在変数  $z_i$  を用いて完備化すると、事後分布は

$$\begin{aligned} p(y|\beta) \propto & \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{(z_i - x'_i\beta)^2}{2}\right] \times \sum_{j=1}^J 1_j(y_i) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_i) \\ & \times \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta - \beta_0)' A(\beta - \beta_0)\right] \end{aligned} \quad (5)$$

となる。順序プロビットモデルの事後分布からの乱数発生には、Albert and Chib(1993)により提案されたギブス・サンプラーを組み合わせたデータ拡大法を使用することができる。しかし、この方法では発生する乱数の間に強い自己相関が発生し、事後分布への収束が遅くなることが知られている。そこで、本稿では Jun and Sabatti(2000)における一般化ギブスサンプラー法を用いてこの問題に対処する。推計は以下の手順で行われる。

まず、 $\beta$  の全条件付き事後分布は以下のように導出される。(5) 式は

$$\begin{aligned} p(\beta|z, y, X) \propto & \exp\left[-\frac{1}{2}(z - X\beta)'(z - X\beta) - \frac{1}{2}(\beta - \beta_0)' A(\beta - \beta_0)\right] \\ & \times \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^J 1_j(y_i) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_i)\right) \\ \Leftrightarrow & \exp\left[-\frac{1}{2}(\beta - \tilde{\beta})' \Sigma^{-1}(\beta - \tilde{\beta}) - \frac{1}{2}(\beta_0 - \hat{\beta})' \tilde{\Omega}^{-1}(\beta_0 - \hat{\beta})\right] \\ & \times \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^J 1_j(y_i) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_i)\right) \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $z = [z_1, \dots, z_K]'$ 、 $X = [x_1, \dots, x_K]$ 、 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'z$ 、 $\tilde{\beta} = (X'X + A)^{-1}(X'z + A\beta_0)$ 、 $\tilde{\Sigma} = (X'X + A)^{-1}$ 、 $\Omega = (X'X)^{-1} + A^{-1}$  とまとめている。よって、 $\beta$  の条件付き事後分布は  $N(\tilde{\beta}, \tilde{\Sigma})$  となる。

閾値  $\gamma_j (j = 2, \dots, J-1)$  は他の閾値  $\gamma_{\cdot \setminus \gamma_j}$  を所与として以下のような全条件付き事後分布を持つ。

$$\gamma_j | \gamma_{\cdot \setminus \gamma_j}, \beta, z, y, X \sim \mathcal{U}(a_j, b_j) \quad (7)$$

この一様分布の下限と上限は

$$a_j = \max\left(\max_{y_i=j} z_i, \gamma_{j-1}\right), b_j = \min\left(\min_{y_i=j+1} z_i, \gamma_{j+1}\right) \quad (8)$$

で与えられる。最後に、 $\beta$  と  $\gamma$  が与えられた下での  $\{z_i\}_{i=1}^n$  の分布は、

$$p(z_i|\beta, \gamma, y, X) \propto \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{(z_i - x'_i\beta)^2}{2}\right] \times \sum_{j=1}^J 1_j(y_i) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_i) \quad (9)$$

であるから、 $\{z_i\}_{i=1}^n$  の全条件付き事後分布は切断正規分布

$$z_i|\beta, \gamma, y, X \sim \mathcal{N}_{(\gamma_{y_{i-1}}, \gamma_{y_i})}(x'_i\beta, 1) \quad (10)$$

になる。その後、強い自己相関を軽減するために、Jun and Sabatti(2000)におけるアルゴリズムを使用する。具体的には、 $\Gamma$  を

$$\Gamma = \{g > 0 : g(z, \beta, \gamma) = (gz, g\beta, g\gamma)\} \quad (11)$$

の操作をするオペレーターとして、サンプリングした  $\beta, \gamma, z$  を  $g$  でスケールすればよい。なお、係数  $g$  は、 $g = \sqrt{U}$  として

$$U|z, \beta, \gamma \sim \mathcal{Ga}\left(\frac{n+p+J-2}{2}, \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - x'_i\beta)^2}{2}\right) \quad (12)$$

としてサンプリングをする。このアルゴリズムにより、サンプリングの自己相関を大幅に減らすことができる。以上をまとめると、順序プロビットモデルの事後分布からのサンプリングは以下の手順で行われることになる。

順序プロビットモデルの一般化ギブス・サンプラー

- Step1.  $\beta^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\tilde{\beta}^{(r-1)}, \tilde{\Sigma}^{(r-1)})$   
 Step2.  $\gamma_j^{(r)} \leftarrow \mathcal{U}(a_j^{(r-1)}, b_j^{(r-1)}), (j = 2, \dots, J)$   
 Step3.  $z_i^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}_{(\gamma_{y_{i-1}}^{(r)}, \gamma_{y_i}^{(r)})}(x'_i\beta^{(r)}, 1) (i = 1, \dots, n)$   
 Step4.  $U^{(r)} \leftarrow \mathcal{Ga}\left(\frac{n+p+J-2}{2}, \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - x'_i\beta^{(r)})^2}{2}\right) (g^{(r)} = \sqrt{U^{(r)}})$   
 Step5.  $(z^{(r)}, \beta^{(r)}, \gamma^{(r)}) = \Gamma(z^{(r)}, \beta^{(r)}, \gamma^{(r)})$

## 2.4 変量効果順序プロビットモデル

前節で説明した順序プロビットモデルの定数項にのみ階層構造を加えたモデルを考える。なお、今後このモデルを「変量効果順序プロビットモデル」と呼び区別していく。前章のモデルでは推計に使用した  $K(=20)$  種類の企業の業種区分において、どの企業においても  $\alpha$  の値は同じであると仮定していた。しかし、業種が違えばその評価の基準が異なるのが自然であり、以上の仮定は強い仮定であるといえる。つまり、各  $\beta$  に関しては前節のモデルと同様に、業種共通であるが、定数項に業種固有の要因が反映されるため、各業種  $k$  (業種内の企業数を  $n_k$  とする。) ごとに異なる切片の値をとると仮定する。これを明示的に表現するため、定数項を分けて表記する。このような仮定の下で、潜在変数は

$$z_{ik} = \alpha_k + x'_{ik}\beta + \varepsilon_{ik} \quad \varepsilon_{ik} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (13)$$

と変更される。ここで、 $\mathbf{z}_k$ 、 $\mathbf{x}_k$ は業種ごとに  $n_k$  個の企業のデータをまとめたベクトル、 $\mathbf{l}$ は1からなる  $n_k \times 1$  ベクトルとすると

$$\mathbf{z}_k = \alpha_k \mathbf{l} + \mathbf{x}_k' \beta + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad \boldsymbol{\varepsilon}_k \sim \mathcal{N}_{n_k}(0, 1) \quad (14)$$

と書き換えられる。格付を判定する閾値である  $\gamma$  は同様に以下のように定められる。

$$\infty = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_J = \infty \quad (15)$$

このモデルに対し、定数項  $\alpha$  に対して階層的な構造を導入する。以下では  $\alpha = [\alpha_1; \dots; \alpha_k]$  とし、以下のような階層事前分布を考える。

$$p(\beta, \alpha, \alpha_0, \xi^2) = p(\beta)p(\alpha, \alpha_0, \xi) \quad (16)$$

$$p(\alpha, \alpha_0, \xi^2) = \left\{ \prod_{k=1}^K p(\alpha_k | \alpha_0, \xi^2) \right\} p(\alpha_0 | \xi^2) p(\xi^2) \quad (17)$$

ここで、

- $p(\beta)$  は正規分布  $\mathcal{N}_k(\beta_0, A^{-1})$
- $p(\xi^2)$  は逆ガンマ分布  $\mathcal{G}a^{-1}(\nu_\alpha/2, \lambda_\alpha/2)$
- $p(\alpha_0 | \xi^2)$  は正規分布  $\mathcal{N}(\mu_\alpha, \xi^2/N_\alpha)$
- $p(\alpha_k | \alpha_0, \xi^2)$  は正規分布  $\mathcal{N}(\alpha_0, \xi^2)$

である。ここで、 $\beta$  の事前分布を  $N(\beta_0, A^{-1})$  とする。さらに潜在変数  $z_k$  を用いて完備化し、 $\alpha$  の項を以下のようにまとめる。

$$\underbrace{\mathbf{z}_k - \alpha_k \mathbf{l}}_{\mathbf{z}_k^*} = \mathbf{x}_k' \beta + \boldsymbol{\varepsilon}_k$$

すると、尤度は

$$p(Z|\beta, \alpha, \alpha_0, \xi^2) \propto \prod_{k=1}^K \left\{ \exp \left[ -\frac{(\mathbf{z}_k^* - \mathbf{x}_k' \beta)^2}{2} \right] \times \prod_{i=1}^{n_k} \left( \sum_{j=1}^J 1_j(y_{ik}) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_{ik}) \right) \right\} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2} (\beta - \beta_0)' A (\beta - \beta_0) \right] \quad (18)$$

となる。 $\beta$  の全条件付き事後分布は以下のように導出される。

$$p(\beta|Z, y, X) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{z}^* - X\beta)' (\mathbf{z}^* - X\beta) - \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)' A (\beta - \beta_0) \right] \\ \times \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \left( \sum_{j=1}^J 1_j(y_{ik}) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_{ik}) \right) \\ \Leftrightarrow \exp \left[ -\frac{1}{2} (\beta - \tilde{\beta})' \Sigma^{-1} (\beta - \tilde{\beta}) - \frac{1}{2} (\beta_0 - \hat{\beta})' \tilde{\Omega}^{-1} (\beta_0 - \hat{\beta}) \right] \\ \times \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \left( \sum_{j=1}^J 1_j(y_{ik}) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_{ik}) \right) \quad (19)$$

ただし、 $\mathbf{z}^* = [\mathbf{z}_1^*; \dots; \mathbf{z}_K^*]$ 、 $X = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_K]$ 、 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{z}^*$ 、 $\tilde{\beta} = (X'X + A)^{-1}(X'\mathbf{z}^* + A\beta_0)$ 、 $\tilde{\Sigma} = (X'X + A)^{-1}$ 、 $\Omega = (X'X)^{-1} + A^{-1}$  とまとめている。よって、 $\beta$  の条件付き事後分布は  $\mathcal{N}_k(\tilde{\beta}, \tilde{\Sigma})$  となる。次に、 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$  の全条件付き事後分布を導出する。 $\beta$  が与えられた下で、各業種の各式に対して  $x_{ik}$  を左辺に移行すると

$$\underbrace{z_{ik} - x_{ik}}_{e_{ik}} = \alpha_k + \epsilon_{ik}$$

であり、 $\{e_{ik}\}_{i=1}^{n_k}$  は  $(\beta, Z_k, X_k)$  が与えられた下では固定された値になるから  $\mathcal{N}(\alpha_k, 1)$  から生成されたデータとみなすことができる。よって、 $\alpha_k (k = 1, \dots, K)$  の全条件付き事後分布は

$$\alpha_k | \beta, \sigma^2, \alpha_0, \xi^2, \mathbf{z}_i, \mathbf{x}_i \sim \mathcal{N}(\hat{\alpha}_k, \hat{\xi}_k^2) \quad (k = 1, \dots, K) \quad (20)$$

ただし、 $\hat{\alpha}_k = (\xi^{-2}\alpha_0 + \sigma^{-2}n_k\bar{e}_k)/(\xi^{-2} + \sigma^{-2}n_k)$ 、 $\hat{\xi}_k^2 = (\xi^{-2} + \sigma^{-2}n_k)^{-1}$ 、 $\bar{e}_k = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k}$  とまとめることができ、 $(\alpha_0, \xi^2)$  の全条件付き事後分布は  $\{\alpha_k\}_{k=1}^K$  をデータとみなすことで、

$$\alpha_0 | \alpha, \xi^2 \sim \mathcal{N}\left(\tilde{\mu}_\alpha, \frac{\xi^2}{\hat{N}_{\alpha,k}}\right) \quad (21)$$

$$\xi^2 | \alpha \sim \mathcal{G}a^{-1}\left(\frac{\hat{\nu}_\alpha}{2}, \frac{\hat{\lambda}_\alpha}{2}\right) \quad (22)$$

ただし、 $\tilde{\mu}_\alpha = (N_{k,\alpha}\mu_\alpha + n_k\bar{\alpha})/(N_\alpha + n_k)$ 、 $\hat{N}_{\alpha,k} = N_\alpha + n_k$ 、 $\hat{\nu}_\alpha = N_\alpha + n_k$ 、 $\hat{\lambda}_\alpha = \nu_\alpha s_\alpha^2 + N_\alpha n_k (\mu_\alpha - \bar{\alpha})^2 / \hat{N}_{\alpha,k}$ 、 $\nu_\alpha = n_k - 1$ 、 $\bar{\alpha} = n_k^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_k$ 、 $s_\alpha^2 = \nu_\alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n_k} (\alpha_k - \bar{\alpha})^2$  である。

残りは閾値、潜在変数  $z_{ik}$  を同様の手順で計算し、Jun and Sabatti(2000) の手法で、自己相関を減少させる。以上をまとめると、変量効果順序プロビットモデルの事後分布からのサンプリングは以下の手順で行われることになる。

変量効果順序プロビットモデルの一般化ギブス・サンプラー

- Step1.  $\beta^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\tilde{\beta}^{(r-1)}, \tilde{\Sigma}^{(r-1)})$   
Step2.  $\gamma_j^{(r)} \leftarrow \mathcal{U}(a_j^{(r-1)}, b_j^{(r-1)}) \quad (j = 2, \dots, J)$   
Step3.  $\alpha_k^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\hat{\alpha}_k, \hat{\xi}_k^2) \quad (k = 1, \dots, K)$   
Step4.  $\alpha_0^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}\left(\tilde{\mu}_\alpha^{(r-1)}, \frac{\xi^{2(r-1)}}{\hat{N}_{\alpha,k}}\right)$   
 $\xi^{2(r)} \leftarrow \mathcal{G}a^{-1}\left(\frac{\hat{\nu}_\alpha}{2}, \frac{\hat{\lambda}_\alpha^{(r)}}{2}\right)$   
Step5.  $z_{ik}^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}_{(\gamma_{y_i-1}^{(r)}, \gamma_{y_i}^{(r)})}(\alpha_k^{(r)} + x'_{ik}\beta^{(r)}, 1) \quad (i = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K)$   
Step6.  $U^{(r)} \leftarrow \mathcal{G}a\left(\frac{(\sum_{k=1}^K n_k) + p + J - 2}{2}, \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} (z_{ik} - \alpha_k^{(r)} - x'_{ik}\beta^{(r)})^2}{2}\right) \quad (g^{(r)} = \sqrt{U^{(r)}})$   
Step7.  $(z^{(r)}, \beta^{(r)}, \{\alpha_k^{(r)}\}_{k=1}^K, \gamma^{(r)}) = \Gamma(z^{(r)}, \beta^{(r)}, \{\alpha_k^{(r)}\}_{k=1}^K, \gamma^{(r)})$

## 2.5 ランダム係数順序プロビットモデル

本節では前節のモデルをさらに拡張した階層モデルを考える。すなわち、切片を含めた全ての係数パラメーター  $\beta_k$  が業種ごとに異なる場合を考える。本稿ではこのモデルを「ランダム係数順序プロビットモデル」として区別していく。この仮定の下で、潜在変数は以下のように変更される。

$$z_{ik} = x'_{ik}\beta_k + \varepsilon_{ik}, \varepsilon_{ik} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (23)$$

潜在変数により完備化された尤度関数は

$$p(y, z|X, \{\beta_k\}_{k=1}^K) \propto \prod_{k=1}^K \prod_{i=1}^{n_k} \exp\left[-\frac{(z_{ik} - x'_{ik}\beta_k)^2}{2}\right] \times \sum_{j=1}^J 1_j(y_{ik}) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_{ik}) \quad (24)$$

となる。ここで、 $\beta_k \sim \mathcal{N}(\beta, \Sigma)$  という事前確率分布を仮定することで階層モデルに拡張することができる。事前確率密度関数のハイパーパラメーターである  $\beta$  と  $\Sigma$  に対して、 $\beta \sim \mathcal{N}(\beta_0, \Sigma_0)$  と  $\Sigma \sim \mathcal{IW}(\nu_0, \Omega_0)$  という事前確率を設定する。ここで、 $\beta_0, \Sigma_0$  は  $\beta$  のハイパー・パラメーターを、 $\nu_0, \Omega_0$  は  $\Sigma$  のハイパー・パラメーターを表す。また、 $\mathcal{IW}(\cdot)$  は逆ウィシャート分布\*2を意味している。つまり、事前分布として以下のような階層的な事前確率を設定することになる。

$$p(\{\beta_k\}_{k=1}^K, \beta, \Sigma) = \left\{ \prod_{k=1}^K p(\beta_k | \beta, \Sigma) \right\} p(\beta | \beta_0, \Sigma_0) p(\Sigma | \nu_0, \Omega_0) \quad (25)$$

このように、業種による違いをパラメーターに反映する階層的な事前確率を用いて事後分布を導出すると

$$\begin{aligned} p(\{\beta_k\}_{k=1}^K, \beta, \Sigma, z|y, X) &\propto \\ &\exp\left\{\frac{(\beta - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)}{2}\right\} |\Sigma|^{-(\nu_0 - (k+1)/2)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Omega_0 \Sigma_0)\right\} \\ &\times \prod_{k=1}^K \left[ |\Sigma|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(\beta_k - \beta)' \Sigma^{-1} (\beta_k - \beta)}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k \beta_k)' (\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_k \beta_k)}{2}\right\} \right] \\ &\times \prod_{i=1}^{n_k} \left( \sum_{j=1}^J 1_j(y_{ik}) 1_{(\gamma_{j-1}, \gamma_j)}(z_{ik}) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

\*2 d 変量多変量正規分布に従う n 個の独立な標本  $y_1, \dots, y_n \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$  からなる  $S = \sum_{i=1}^n y_i' y_i$  に対する同時確率密度関数は

$$p(S|\Sigma) = c^{-1} |S|^{(n-d-1)/2} |\Sigma|^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} S)\right\}$$

で与えられ、これをウィシャート分布という。ただし、c は規格化定数である。逆に、S を固定して  $\Sigma$  を変量とした場合、その密度関数は

$$p(\Sigma|S) \propto |\Sigma|^{-(n+d+1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma^{-1} S)\right\}$$

となる。これは逆ウィシャート分布と呼ばれ  $\Sigma \sim \mathcal{IW}_d(n, S)$  と表記する。

従って、 $\mathbf{z}_k$  が与えられた下での  $\beta_k$  の全条件付き事後分布は

$$\beta_k | \mathbf{z}_k, \beta, \Sigma, \mathbf{z}_k \sim \mathcal{N}(\hat{\beta}_k, \hat{\Sigma}_k) \quad (k = 1, \dots, K) \quad (27)$$

ただし、 $\mathbf{z}_k = [z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{n_k k}]'$ ,  $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{n_k k}]'$ ,  $\hat{\Sigma}_k = \{(\mathbf{x}_k' \mathbf{x}_k) + \Sigma^{-1}\}^{-1}$ ,  $\hat{\beta}_k = \hat{\Sigma}_k \{\mathbf{x}_k' \mathbf{z}_k + \Sigma^{-1} \beta\}$  である。閾値、潜在変数  $z_{ik}$  は前節と同様の手順で計算する。次に、階層パラメーターの事後分布を導出する。 $\{\beta_k\}_{k=1}^K$  と  $\Sigma$  が与えられた下での  $\beta$  の全条件付き事後分布は

$$\beta | \{\beta_k\}_{k=1}^K, \Sigma \sim \mathcal{N}(\hat{\beta}, \hat{\Sigma}) \quad (28)$$

ただし、 $\hat{\Sigma} = (K\Sigma^{-1} + \Sigma_0^{-1})^{-1}$ 、 $\hat{\beta} = \hat{\Sigma} (\Sigma^{-1} \sum_{k=1}^K \beta_k + \Sigma_0^{-1} \beta_0)$  である。 $\{\beta_k\}_{k=1}^K$  と  $\beta$  が与えられた下での  $\Sigma$  の全条件付き事後分布は

$$\Sigma | \{\beta_k\}_{k=1}^K, \beta \sim \mathcal{IW}(\hat{\nu}, \hat{\Omega}) \quad (29)$$

ただし、 $\hat{\nu} = K + \nu_0$ 、 $\hat{\Omega} = \left( \left( \sum_{k=1}^K (\beta_k - \beta)(\beta_k - \beta)' \right) + \Omega_0^{-1} \right)$  である。最後に、Jun and Sabatti(2000) の手法で、自己相関を減少させる。以上をまとめると、ランダム係数順序プロビットモデルのサンプリングは以下の手順で行われることになる。

——— ランダム係数順序プロビットモデルの一般化ギブス・サンプラー ———

- Step1.  $\beta_k^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\hat{\beta}_k^{(r-1)}, \hat{\Sigma}_k^{(r-1)}) \quad (k = 1, \dots, K)$   
 Step2.  $\gamma_j^{(r)} \leftarrow \mathcal{U}(a_j^{(r-1)}, b_j^{(r-1)}), (j = 2, \dots, J)$   
 Step3.  $z_{ik}^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\gamma_{y_{i-1}}^{(r)}, \gamma_{y_i}^{(r)})(x'_{ik} \beta_k^{(r)}, 1) \quad (i = 1, \dots, n_k, k = 1, \dots, K)$   
 Step4.  $\beta^{(r)} \leftarrow \mathcal{N}(\hat{\beta}^{(r-1)}, \hat{\Sigma}^{(r-1)})$   
 $\Sigma^{(r)} \leftarrow \mathcal{IW}(\hat{\nu}, \hat{\Omega}^{(r)})$   
 Step5.  $U^{(r)} \leftarrow \mathcal{Ga} \left( \frac{(\sum_{k=1}^K n_k) + p + J - 2}{2}, \frac{\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} (z_{ik}^{(r)} - x'_{ik} \beta_k^{(r)})^2}{2} \right) (g^{(r)} = \sqrt{U^{(r)}})$   
 Step6.  $(z^{(r)}, \{\beta_k^{(r)}\}_{k=1}^K, \gamma^{(r)}) = \Gamma(z^{(r)}, \{\beta_k^{(r)}\}_{k=1}^K, \gamma^{(r)})$

### 3 実証分析

本章では、前章までに論じた推定手法を用いて、3つのモデル：順序プロビットモデル、変量効果順序プロビットモデル、ランダム係数順序プロビットモデルに関する実証分析を行う。

#### 3.1 データ

本稿では、企業格付のデータとして日本格付研究所 (JCR)、格付投資情報センター (R & I) より入手できる非金融業種の 2013 時点の企業格付情報を用いた。重複している会社の格付に関しては、両社とも一致、もしくは一ノッチ以内の差であることが殆どであった。そこで、標本数の増加のため、本稿では両社の格付情報を統合して用いた。なお、重複した上で両社の格付が異なっていた場合、R & I の格付を優先した。以上の基準で集計後、欠損値のあるものを取り除いた結果、合計 517 社となった。格付の区分けに関しては、「AAA、AA+、AA、AA-」の格付を「AAA/AA」としてランク 8 にまとめ、「BB+、BB、BB-、B+、B、B-、CCC+」を「BB」としてランク 1 にまとめた。その間は 1 ノッチごとに下から順に 2 から 7 のランクを割り振った。また、業種区分に関しては、金融業を除いた業種のうち、標本が少なかった業種を【金属製品、鉄鋼、非鉄金属】、【精密機器、電気危機】、【ゴム、石油、鉱業、繊維】、【海運、陸運、空運】とし、合計 20 業種に統合した。説明変数の候補としては、日経 NEEDS よりいくつかの財務変数を選択した後、通常の場合の順序プロビットモデルにおいて有意となった【自己資本の対数値】、【自己資本比率】、【ROE の三年平均値】、【固定比率】、【有利子負債 CF 比率】、【有利子負債比率】を選定した。これは、先行研究において説明変数の候補とされていた、また有意な結果が報告されている変数である。

なお、これらの変数における財務指標として特徴と、期待される符号は以下のようになる。

- 【自己資本の対数値】：企業規模を示す財務指標である。期待される符号は正。
- 【自己資本比率】：企業の自己資本（株主資本と評価・換算差額等の和）を総資産で除すことで得られる指標で、健全性を表す。この値が大きいほど借入金利の負担が少ないため、一般的にこの値が大きいほうが健全性が高いとされる。期待される符号は正。
- 【ROE】：株主資本に対する当期純利益の比率であり、株主の投資額に比してどれだけ効率的に利益を獲得したか、を判断する効率性指標である。期待される符号は正。
- 【固定比率】：固定資産を自己資本で除すことで得られる指標で、安全性を示す。この指標が 100 % を超えた場合、固定資産の調達に他人資本に依存していることになるため、安全性が低いとされる。期待される符号は負であるが、一概には判断できない。
- 【有利子負債 CF 比率】：有利子負債をキャッシュフローで除した指標で、有利子負債の返済能力を測る指標の一つである。一般に期待される符号は負。
- 【有利子負債比率】：自己資本に占める、利払いや返済が必要な有利子負債の比率で、この指標が高いほど借入金等の負債に依存していることを意味する。期待される符号は負である。

### 3.2 モデルの評価基準

モデルの評価に関しては、DIC（ベイズ偏差情報基準）を用いる。DIC とは、Spiegelhalter, et al.(2002) により提案された、AIC（赤池情報量基準）をベイズモデルに拡張したものであり、パラメーター  $\theta_k$  を持つモデル  $k$  に対し、DIC は偏差尺度

$$D(\theta_k) = -2 \log p(y|\theta_k)$$

の事後分布に基づいて、以下で定義される。

$$\begin{aligned} DIC(k) &= 2\bar{D}(\theta_k) - D(\bar{\theta}_k) \\ &= \bar{D}(\theta_k) + (\bar{D}(\theta_k) - D(\bar{\theta}_k)) \\ &= \bar{D}(\theta_k) + p_k \end{aligned}$$

ただし、 $D(\theta_k)$  は偏差尺度の事後分布に関する期待値  $E_{\theta|Y}[D(\theta_k)]$  の推定値

$$\bar{D}(\theta_k) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \left( -2 \log p(Y|\theta_k^{(j)}) \right)$$

で評価する。ただし、 $M$  は MCMC で発生させた乱数の総数である。また、モデルの複雑さを有効パラメーター数として、

$$p_k = \bar{D}(\theta_k) - D(\bar{\theta}_k)$$

で評価する。ただし、 $D(\bar{\theta}_k)$  は偏差尺度をパラメーターの事後分布に関する期待値  $\bar{\theta}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \theta_k^{(j)}$  で置き換えた

$$D(\bar{\theta}_k) = -2 \log p(Y|\bar{\theta}_k)$$

で定義される。DIC は MCMC により発生した事後分布からの乱数より容易に計算することができ、また階層モデル等の階層パラメーターを含むモデルにも適用できることから、幅広く使用されている。DIC の値が低いモデルほど、データへの当てはまりがよいと結論づけることができる。

また、モデルの予測能力を測る指標として、RMSE(Root of Mean Squared Error) も用いる。RMSE とはモデルが示唆する予測値と、実際の値の乖離値の二乗和を平均したものであり、モデルの予測的中度合いを測る指標になる。この指標に関しても、値が小さいほど予測能力が高いことを意味している。

モデルの収束判定に関しては Geweke(1992) による CD(Convergence diagnostic) 統計量を用いる。これは、バーンイン後の不変分布からのサンプリング系列を前半と後半に分け、平均値の差の検定を行うというものである。すなわち、CD の絶対値が 1.96 以内であれば、そのパラメーターは不変分布に収束したものとしてみなすことができる。

また、用いた MCMC 法のサンプリング方がランダム・サンプリングと比べてどの程度非効率か

を示す指標として、非効率性因子 (inefficiency factor) を計算している。本稿では一般化ギブスサンプラーの適用により、順序プロビットモデルの閾値のサンプリングの非効率性が問題のない程度まで低減していることを示すのに使用する。MCMC でサンプリングされたパラメーターの標本平均の分散を  $\sigma^2$ 、 $k$  次の自己相関を  $\rho_k$  とすると、 $M$  個の標本平均の分散は  $\sigma^2(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k)/M$  となる。それに対し、ランダムサンプリングの場合の分散は  $\sigma^2/M$  となるので、その比をとった  $1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k$  が MCMC のランダムサンプリングに対する非効率性を表すことになる。この値の推定値である

$$IF = 1 + 2 \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k$$

を非効率性因子と呼ぶ。無限次元の自己相関は計算することができないので、自己相関が有意で無くなる  $K$  次以降は切断して用いる。例えば、非効率性因子が 100 の場合は、MCMC でランダムサンプリングと同じだけの標準誤差の推定値を得るためにはランダムサンプリングの 10 倍 (100 の平方根) のサンプリングを行う必要があることを意味する。

一方、推計に使用しなかったデータの標本外予測についてもモデルが有効に機能していることを測るために、業種ごとの格付の経験分布とモデルから示唆される確率の対数オッズ比を用いる。本稿では、20 業種からランダムに一社ずつ標本外予測用の企業をランダムに 1000 回抽出し、その場合の対数オッズ比の分布をモデル間で比較する。

### 3.3 順序プロビットモデルの推定

前章で説明したマルコフ連鎖モンテカルロ法を用いることにより、被説明変数を企業格付とする順序プロビットモデルを推定した。また、変数選択の方法としては SDDR (Savage-Dickey Density Ratio) の常用対数値を用いた。頻度主義、ベイズに関わらず有意性検定は回帰係数に関する重要な仮説検定であるが、ベイズ統計における仮説検定は頻度主義的な方法とは異なり、ベイズファクターと呼ばれる統計量を用いて行われる。SDDR とはこのような有意性検定を行う場合において、ベイズファクターと同値関係にある統計量であり、計算が容易であることから検定の際用いられることが多い。

ベイズファクターと SDDR

$H_0 : \theta=0$  vs  $H_1 \theta \neq 0$  に対し

$$B_{01}(D) = \frac{\int_{\theta=0} p(\theta|D)d\theta}{\int_{\theta \neq 0} p(\theta|D)d\theta} = \frac{f(\theta=0|D)}{f(\theta=0)} = SDDR$$

と定義される。

この SDDR の値が 0 を下回る場合、回帰係数の値は 0 であるという帰無仮説を棄却し、有意と判断することができる。以上の SDDR を用いたところ、【自己資本の対数値】、【自己資本比率】、【ROE の三年平均値】、【固定比率】、【有利子負債 CF 比率】、【有利子負債比率】の 6 つの変数が採

扱された。以下の表は各説明変数及び、閾値のパラメーターについての事後平均、事後標準偏差、95 % HPD 区間、SDDR、非効率性因子、CD について集計したものである。なお、MCMC 法による 20 万回のサンプリングを行い、そのうち前半の 10 万回をバーンインとして処理している。

表 1 順序プロビットモデルの事後分布 (DIC= 146.71 ,RMSE= 1.39)

| パラメーター     | 説明          | 事後平均    | 事後分散  | 95 % HPD 区間      | SDDR     | 非効率性因子 | CD     |
|------------|-------------|---------|-------|------------------|----------|--------|--------|
| $\alpha$   | 切片          | -10.658 | 0.669 | [-11.974 -9.365] | -81.959  | 2.382  | -0.115 |
| $\beta_1$  | 自己資本の対数値    | 1.042   | 0.054 | [ 0.935 1.146]   | -141.769 | 1.228  | 0.690  |
| $\beta_2$  | 自己資本比率      | 3.432   | 0.366 | [ 2.681 4.122]   | -0.891   | 1.010  | -0.062 |
| $\beta_3$  | ROE 三年平均    | 0.019   | 0.006 | [ 0.007 0.031]   | -2.999   | 1.037  | 1.156  |
| $\beta_4$  | 固定比率        | 0.391   | 0.081 | [ 0.227 0.543]   | -0.384   | 0.940  | 0.654  |
| $\beta_5$  | 有利子負債 CF 倍率 | 0.001   | 0.000 | [ 0.001 0.002]   | -0.965   | 1.029  | -1.906 |
| $\beta_6$  | 有利子負債比率     | -0.401  | 0.109 | [-0.617 -0.191]  | -18.364  | 1.092  | -1.670 |
| $\gamma_1$ | 閾値 [2-3]    | 0.822   | 0.144 | [ 0.531 1.095]   | -        | 8.100  | 0.386  |
| $\gamma_2$ | 閾値 [3-4]    | 1.979   | 0.163 | [ 1.663 2.294]   | -        | 10.553 | 0.471  |
| $\gamma_3$ | 閾値 [4-5]    | 2.794   | 0.174 | [ 2.445 3.124]   | -        | 9.394  | 0.204  |
| $\gamma_4$ | 閾値 [5-6]    | 3.859   | 0.190 | [ 3.487 4.231]   | -        | 6.286  | -0.068 |
| $\gamma_5$ | 閾値 [6-7]    | 4.804   | 0.207 | [ 4.406 5.218]   | -        | 3.988  | -0.182 |
| $\gamma_6$ | 閾値 [7-8]    | 5.481   | 0.222 | [ 5.057 5.925]   | -        | 3.326  | 0.374  |

まず、どの変数についても CD の値の絶対値が 1.96 を下回っているため、不変分布に収束していると判断することができる。また、SDDR の値も全て 0 を下回っており、有意と判定される。実際、95 % HPD 区間を見ても 0 を含んでいるものがなく、直観的にも有意であると考えることができる。一般化ギブスサンプラーを使用したことで、閾値の非効率性因子も、係数に比べるとやや高いものの、低い水準に収まっていることが分かる。(一般に、この値が 3 ケタを超えるとサンプリング方法の改良が必要であると判断される。) なお、符号に関しては、【自己資本の対数値】、【自己資本比率】、【ROE 三年平均】、【有利子負債比率】に関しては期待される符号を得たが、【固定比率】、【有利子負債 CF 倍率】に関しては、期待される符号と異なる推計結果を得た。

### 3.4 変量効果順序プロビットモデルの推定

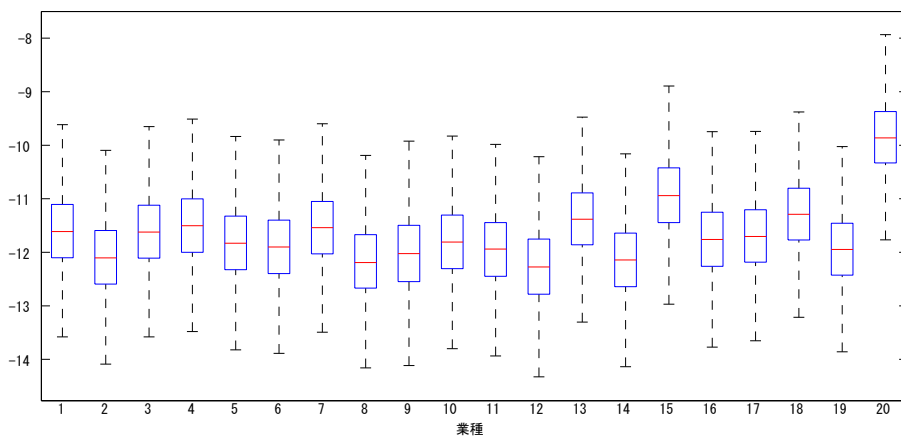
本節では、変量効果順序プロビットモデルの推定を行い、通常順序プロビットモデルと比較する。変量効果順序プロビットモデルでは、基本的な格付決定メカニズムは業種ごとに共通であるものの、業種による個別要因で定数項のみが異なると仮定している。なお、説明変数に関しては、モデルの差異による当てはまりに注目している関係上、前節のモデルで採択された 6 つの変数をそのまま用いる。なお、MCMC 法による 20 万回のサンプリングを行い、そのうち前半の 10 万回をバーンインとして処理している。以下がその結果をまとめたものである。

表 2 変量効果順序プロビットモデルの事後分布 (DIC= 138.51 ,RMSE= 1.25 )

| パラメーター     | 説明          | 事後平均   | 事後標準偏差 | 95 % HPD 区間       | SDDR     | 非効率性因子 | CD     |
|------------|-------------|--------|--------|-------------------|----------|--------|--------|
| $\beta_1$  | 自己資本の対数値    | 1.160  | 0.059  | [ 1.039 1.270 ]   | -132.027 | 1.497  | -1.120 |
| $\beta_2$  | 自己資本比率      | 4.192  | 0.399  | [ 3.402 4.974 ]   | -23.179  | 1.173  | -1.837 |
| $\beta_3$  | ROE 三年平均    | 0.025  | 0.006  | [ 0.013 0.038 ]   | -1.289   | 1.164  | -0.804 |
| $\beta_4$  | 固定比率        | 0.384  | 0.086  | [ 0.208 0.543 ]   | -3.198   | 1.153  | 0.798  |
| $\beta_5$  | 有利子負債 CF 倍率 | 0.002  | 0.000  | [ 0.001 0.002 ]   | -1.630   | 1.135  | -1.217 |
| $\beta_6$  | 有利子負債比率     | -0.459 | 0.114  | [ -0.681 -0.240 ] | -2.531   | 1.204  | -0.685 |
| $\gamma_1$ | 閾値 [2-3]    | 1.105  | 0.198  | [ 0.747 1.523 ]   | -        | 8.438  | 1.495  |
| $\gamma_2$ | 閾値 [3-4]    | 2.420  | 0.209  | [ 2.022 2.850 ]   | -        | 9.449  | 1.729  |
| $\gamma_3$ | 閾値 [4-5]    | 3.325  | 0.219  | [ 2.880 3.735 ]   | -        | 8.405  | 1.490  |
| $\gamma_4$ | 閾値 [5-6]    | 4.495  | 0.236  | [ 4.043 4.957 ]   | -        | 6.311  | 1.933  |
| $\gamma_5$ | 閾値 [6-7]    | 5.569  | 0.254  | [ 5.111 6.099 ]   | -        | 4.122  | 1.716  |
| $\gamma_6$ | 閾値 [7-8]    | 6.357  | 0.275  | [ 5.886 6.950 ]   | -        | 3.340  | 1.943  |

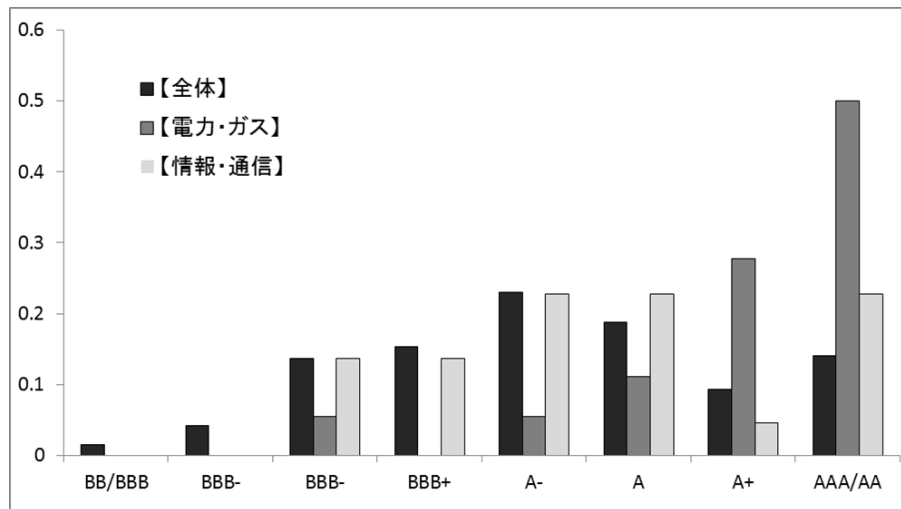
まず、どの変数についても CD の値の絶対値が 1.96 を下回っているため、前節同様に不変分布に収束していると判断することができる。また SDDR の値により、順序プロビットモデルで有意であった説明変数は、同様に有意であることが確認できる。さらに、モデルの当てはまりを測る指標である DIC、RMSE に目を向けると、通常の順序モデルに比して大きく改善されていることが分かる。(通常の順序モデルの DIC= 146.71,RMSE= 1.39 に対し、DIC= 138.51,RMSE= 1.25)。このように、企業格付を順序モデルで予測する場合は、その企業が含まれる業種を考慮した方がその予測が向上するということを支持する結果を得た。また以下の図は、異質性を考慮した場合の切片の事後分布を業種ごとに箱ひげ図を用いてまとめたものである。なお、赤線が中央値、箱の上下がそれぞれ第一、第三四分位点、上下の黒点線が 95 %信用区間を意味している。

図 2 切片の事後分布の boxplot



以上の図より、業種ごとに格付の傾向に差があるという特徴を、切片の分布がうまく捉えていることが確認できる。特に、グループ内の格付の平均が最も高かった【電力・ガス業】(番号 20)の切片の値は、他の業種に比べかなり大きい。これは、同じ財務状況であっても、【電力・ガス業】に分類されるという情報だけで格付を通常より高く見積もることができるということを意味しており、我々の直観にも整合している。実際、電力業における格付の経験分布と、全業種をプールした経験分布を比較したものが以下の図 3 である。

図 3 電力・ガス業と全体の格付ヒストグラム



日本格付研究所 (JCR)、格付投資情報センター (R & I)HP より筆者作成

このように【電力・ガス業】と全体の格付の経験相対度数分布には明確な差があり、この差から得られる情報を格付の判定に利用することで、当てはまりが向上したものと考えられる。しかし、切片のみで業種の異質性を捉える事には限界もある。例えば、最も切片の値が小さい【情報・通信業】に関する経験分布を全業種の経験分布と比較してみると平均の相対経験度数分布とほぼ同じ、むしろ平均に比して高格付が出やすい傾向があることが確認できる。このように直観的に解釈が難しい場合もある。これは、業種間の異質性を切片のみに導入したから生じる問題であろう。何故なら、業種が違えば説明変数として使用した財務指標が高く出やすい業種、低く出やすい業種があるにも関わらず、その差を無視しているからである。次節では切片も含めた説明変数の係数全てに業種間の異質性を考慮した階層モデル：「ランダム係数順序プロビットモデル」について考察する。

### 3.5 ランダム係数順序プロビットモデルの推定

本節では、前節の変量効果順序プロビットモデルを拡張した、全係数が業種ごとに階層化されたランダム係数プロビットモデルの推計を行う。以下、推定されたパラメーターの数が多いため事後平均値、また有意性検定のための SDDR を掲載している。なお、CD は全てのパラメーターについて 1.96 以下であることから、分布が収束していることが確認できた。また、非効率性因子に関しても、他のモデルと同様、問題のない範囲に収まっていることを確認した。

表3 ランダム係数順序プロビットモデルの【切片】【自己資本対数値】【自己資本比率】【ROE三年平均】に関する事後分布 (DIC= 139.31 ,RMSE= 1.27 )

| 説明             | 切片      |        | 自己資本対数値 |        | 自己資本比率 |        | ROE 三年平均 |        |
|----------------|---------|--------|---------|--------|--------|--------|----------|--------|
|                | 事後平均    | SDDR   | 事後平均    | SDDR   | 事後平均   | SDDR   | 事後平均     | SDDR   |
| 1: 金属・鉄鋼・非鉄金属  | -12.814 | -4.738 | 1.433   | -4.738 | 1.933  | -0.107 | -0.018   | 2.002  |
| 2: 電気・精密機器     | -12.697 | -6.460 | 1.238   | -6.460 | 3.305  | -2.522 | 0.084    | -1.430 |
| 3: 食品          | -12.935 | -5.070 | 1.376   | -5.070 | 1.795  | -0.066 | 0.074    | 1.463  |
| 4: ゴム・石油・工業・繊維 | -12.570 | -4.051 | 1.321   | -4.051 | 2.722  | -0.551 | 0.217    | -0.363 |
| 5: 化学          | -12.411 | -5.058 | 1.251   | -5.058 | 2.605  | -0.635 | 0.038    | 1.728  |
| 6: 機械          | -12.835 | -5.027 | 1.361   | -5.027 | 2.263  | -0.441 | 0.022    | 1.911  |
| 7: 建設          | -13.362 | -4.497 | 1.364   | -4.497 | 1.936  | -0.072 | 0.056    | 1.511  |
| 8: 製紙パルプ       | -13.169 | -4.171 | 1.268   | -4.171 | 1.756  | 0.013  | 0.172    | 0.917  |
| 9: 医薬品         | -13.301 | -4.314 | 1.325   | -4.314 | 1.306  | 0.171  | 0.110    | 1.251  |
| 10: ガラス        | -13.189 | -4.232 | 1.344   | -4.232 | 2.253  | -0.228 | 0.052    | 1.613  |
| 11: その他製造      | -13.126 | -4.266 | 1.342   | -4.266 | 2.140  | -0.182 | 0.057    | 1.496  |
| 12: 情報・通信      | -12.729 | -4.428 | 1.302   | -4.428 | 2.424  | -0.386 | -0.007   | 2.419  |
| 13: 倉庫・運輸      | -13.167 | -4.117 | 1.333   | -4.117 | 1.934  | -0.068 | 0.290    | 0.851  |
| 14: 輸送用機器      | -12.375 | -4.868 | 1.277   | -4.868 | 2.805  | -0.779 | 0.007    | 2.004  |
| 15: 不動産        | -12.932 | -4.157 | 1.211   | -4.157 | 3.316  | -1.071 | -0.012   | 1.828  |
| 16: 海陸空運       | -12.718 | -4.441 | 1.243   | -4.441 | 2.379  | -0.431 | 0.206    | -0.579 |
| 17: サービス       | -13.151 | -4.229 | 1.467   | -4.229 | 1.769  | -0.010 | 0.080    | 1.394  |
| 18: 卸売         | -12.137 | -5.057 | 1.293   | -5.057 | 1.891  | -0.192 | -0.015   | 1.930  |
| 19: 小売         | -13.158 | -5.298 | 1.235   | -5.298 | 2.529  | -0.584 | 0.157    | -2.031 |
| 20: 電力・ガス      | -12.367 | -3.986 | 1.348   | -3.986 | 2.550  | -0.372 | 0.290    | -2.201 |

なお、ここでもMCMC法による20万回のサンプリングを行い、そのうち前半の10万回をバーンインとして処理している。切片、自己資本対数値は全ての変数について有意となった。自己資本比率については、業種8:【製紙パルプ】、業種9:【医薬品】を除く全ての変数において有意になった。またこれらの変数に関しては、各業種ごとの平均値にも差がみられることから、モデルが業種間の異質性をうまく捉えていることが確認できる。しかし、【ROE三年平均】は有意でない係数が目立つ。ただし、有意な業種2【電気・精密機器】、4【ゴム・石油・工業・繊維】、16【海陸空運】、19【小売】、20【電力・ガス】に関しては全体をプールして推計した場合と同様に、いずれも期待される符号である正の値が推定されており、更にその値は業種によってばらつきがみられる。このように、全体をプールした場合においては有意になった係数が階層モデルでは有意ではないケースが現れたことは注目に値する。【ROE三年平均】が格付の際に重視される業種とされない企業の差をモデルが区別することに成功しているといえるからである。

表 4 ランダム係数順序プロビットモデルの【固定比率】【有利子負債 CF 比率】【有利子負債比率】に関する事後分布

| 説明             | 固定比率   |        | 有利子負債 CF 倍率 |        | 有利子負債比率 |        |
|----------------|--------|--------|-------------|--------|---------|--------|
|                | 事後平均   | SDDR   | 事後平均        | SDDR   | 事後平均    | SDDR   |
| 1: 金属・鉄鋼・非鉄金属  | -0.821 | 0.253  | 0.0003      | 3.016  | -0.154  | 0.784  |
| 2: 電気・精密機器     | -0.308 | 0.835  | 0.0178      | 1.701  | -0.095  | 1.141  |
| 3: 食品          | -0.233 | 0.829  | 0.1039      | 1.2186 | -0.831  | 0.409  |
| 4: ゴム・石油・工業・繊維 | -0.534 | 0.568  | 0.0308      | 1.185  | -1.122  | 0.120  |
| 5: 化学          | 0.160  | 0.815  | 0.0034      | 1.652  | -0.566  | 0.576  |
| 6: 機械          | -0.28  | 0.801  | 0.0065      | 2.124  | -0.858  | 0.260  |
| 7: 建設          | 0.401  | 0.723  | 0.0014      | 3.080  | -1.055  | -0.086 |
| 8: 製紙パルプ       | 0.151  | 0.678  | -0.021      | 1.967  | -0.419  | 0.594  |
| 9: 医薬品         | 0.245  | 0.631  | 0.031       | 1.126  | -0.542  | 0.495  |
| 10: ガラス        | 0.230  | 0.695  | 0.1223      | -0.272 | -1.235  | 0.099  |
| 11: その他製造      | 0.191  | 0.652  | 0.013       | 1.417  | -1.145  | 0.201  |
| 12: 情報・通信      | 0.347  | 0.801  | -0.0268     | 1.367  | -1.331  | 0.061  |
| 13: 倉庫・運輸      | 0.122  | 0.680  | -0.0173     | 1.373  | -0.132  | 0.648  |
| 14: 輸送用機器      | -0.02  | 0.922  | 0.0067      | 2.497  | -0.996  | 0.072  |
| 15: 不動産        | 0.689  | -0.028 | 0.1373      | 1.092  | -1.109  | -0.518 |
| 16: 海陸空運       | 0.284  | 0.823  | -0.0015     | 2.876  | -0.721  | 0.397  |
| 17: サービス       | -0.646 | 0.463  | 0.1043      | 1.301  | -0.571  | 0.511  |
| 18: 卸売         | 0.248  | 0.915  | -0.0097     | 2.318  | -0.416  | 0.584  |
| 19: 小売         | 0.265  | 0.877  | -0.0128     | 2.203  | -0.667  | 0.413  |
| 20: 電力・ガス      | 0.172  | 0.705  | -0.0006     | 3.490  | -0.032  | 0.668  |

残りの 3 つに関してはほぼ有意ではないという結果が確認された。DIC の値は 139.31 となり、通常の順序モデル (DIC=146.71) よりも高い当てはまりであるが、変量効果順序プロビットモデル (DIC=138.51) と比較してモデルの当てはまりは低下してしまった。これは、パラメーター数が増えたことによるモデルへの当てはまりの向上に対してパラメーター数が増えたことのペナルティが上回ってしまったことを意味している。一般に、パラメーター数を増加させれば必ずモデルへの当てはまりは増加する。しかし、オーバーフィッティングが生じた結果その増加分を上回るペナルティが発生したと解釈できる。その結果、前に確認したようにいくつかの変数は有意ではなくなってしまった。すなわち、全ての係数を階層化するのはむしろ過剰であり、定数項のみを階層化することで十分であることが確認できた。

### 3.6 標本外予測に関する当てはまりの比較

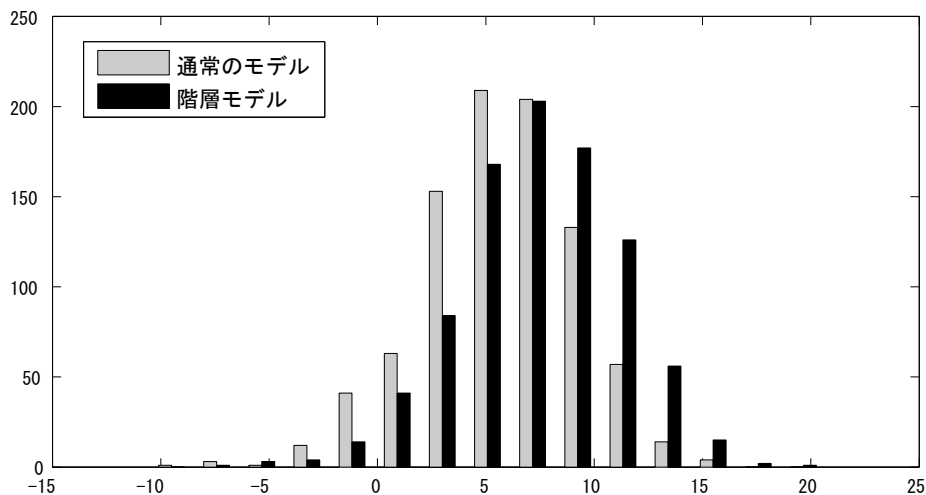
本節では、標本外予測に関する当てはまりの比較を行う。前節の分析により、通常の順序プロビットモデルを使用するより業種の異質性を考慮した階層モデルを使用した方が当てはまりが向上することが分かった。また、階層モデルを使用する場合は、全係数を階層化するよりも、切片のみを階層化した方がモデルの当てはまりが向上することが明らかになった。しかし、前節での分析は

インサンプル、すなわち推定に使用したデータに関しての当てはまりを論じたものであり、推定に使用しなかったデータ（標本外予測）に対しても同様に当てはまりがよいとは限らない。そこで、本節では 20 種類の業種からランダムに 1 つずつサンプルを抜き出し、これを評価用のデータとして使用する。なお、恣意性をなくすため、1000 回の企業のランダム抽出を行った。具体的には、標本内の経験分布から抜き出された企業の格付が得られる確率をベンチマークとして、モデルによって真の格付の確率がどの程度向上したかをそれらの確率のオッズ比を取ることで比較し、これを標本外予測の当てはまりの良さの基準として使用した。例えば、ある業種  $k$  からある企業が抜き出されて、その真の格付がランク  $j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) であったとする。この場合、業種  $k$  の経験分布のみからその企業の正しい格付  $j$  が出る確率を判定する場合、その確率はその業種に含まれる格付  $j$  の割合になり、その確率を  $p_0^k$  としよう。一方、モデルが真の格付を示唆する確率を  $p_1^k$  とする。するとそのオッズ比は  $p_1^k/p_0^k$  と計算される。モデルは財務情報を用いてその確率を判定しているので、経験分布のそれより正しい格付を判定する確率は高くなっていることが期待されるだろう。これを 20 業種に関して繰り返しまとめ、対数をとったものが標本外予測の当てはまりの良さを示す指標になる。すなわちモデル  $m$  に関する対数オッズ比は

$$odds^m = \sum_{k=1}^{20} (\log p_1^k - \log p_0^k)$$

である。この基準により、通常の順序プロビットモデルと切片のみを階層化したモデルを比較していく。以下の図は、通常のモデルと階層モデル（切片のみ）についての 1000 回のランダム抽出ごとに、経験分布とモデルが示唆する確率の対数オッズ比の分布である。

図 4 通常のモデルと階層モデルの当てはまりの比較-対数オッズ比の分布-



上の図より、階層モデルの方が正に寄った分布であることが確認できる。実際、対数オッズ比の平

## 業種間の異質性を考慮した企業格付評価

均は通常モデルと階層モデルでそれぞれ (5.6009,7.4196) であるため、インサンプルのみならず、階層化したモデルの方が、標本外予測に対する予測力も高いことが確認できる。

## 4 結論

本稿では、格付予測モデルとして使用されることの多い順序プロビットモデルを拡張し、ベイズ流の手法を用いて業種ごとの階層構造を導入した。通常の順序プロビットモデルをベンチマークとし、階層モデルとして、切片を階層化した「変量効果順序プロビットモデル」、すべての係数を階層化した「ランダム係数順序プロビットモデル」の計3つのモデルを用いて格付予測の比較を行った。その結果、どちらの階層モデルもベンチマークのDICの数値を下回り、データへの当てはまりがよいという結果を得た。また、階層モデル間の比較では、ランダム係数順序プロビットモデルより、変量効果順序プロビットモデルの方が当てはまりがよいとの結果になった。これは、自由度が減少したことのペナルティが、パラメーターを増やしたことへのデータへの当てはまりの向上分を上回ったと解釈することができる。すなわち今回の格付データに関しては、全係数を階層化する事は過剰であり、業種間の異質性を考慮するには切片のみを階層化することで十分であると考えることができる。また、階層モデルは標本外予測に対しても、通常モデルを上回る予測力を有していることも確認できた。

以上の結果は、格付予測モデルを組むに際し、業種間の異質性を考慮することの重要性を示しているといえる。なお、階層モデル間の比較に際し、全ての係数を階層化したモデルの当てはまりが係数のみを階層化したモデルに劣っているという結果は本稿で使用した格付の標本数に依存している可能性がある。サンプルサイズを大きくすることで結果が逆転することも考えるので、この点に関しては慎重に議論を重ねる必要があるだろう。

最後に、今後の展望を述べる。本稿の冒頭で述べたように格付モデルに順序プロビットを使用することは、平行性の仮定の観点から必ずしも望ましくない。そこで、逐次プロビットモデルや多項プロビットモデル等の平行性の仮定が満たされていなくても使用できるより柔軟なモデルを使用し、上で業種間の階層構造をモデルに導入した場合にどのような結果になるかは興味深い。

## 参考文献

- [1] 沖本竜義 (2010) 『経済・ファイナンスデータの計量時系列分析』 朝倉書店
- [2] 奥村拓史・各務和彦 (2012) 「階層ベイズ・モデルによるクレジットスコアリング・モデル：住宅ローンコンソーシアム・データへの応用」 日本統計学会誌 25-53
- [3] 木島正明・小守林克哉 (1999) 『信用リスク評価の数理モデル』 朝倉書店
- [4] 草場洋方 (2011) 「データ・セグメント法を用いた順序ロジットモデルによる企業信用格付の推定」 みずほコーポレート銀行 産業調査部
- [5] 小林正人 (2001) 「順序プロビット・モデルのテストと社債格付データへの応用」 日本銀行金融研究所 『金融研究』
- [6] 照井伸彦 (2010) 『Rによるベイズ統計分析』 朝倉書店
- [7] 中妻照雄 (2003) 『ファイナンスのためのMCMC法によるベイズ分析』 三菱経済研究所
- [8] 中妻照雄 (2007) 『入門ベイズ統計学』 朝倉書店
- [9] 中妻照雄 (2013) 『実践ベイズ統計学』 朝倉書店
- [10] 中山めぐみ, 森平爽一郎 (1998) 「格付け選択確率の推定と信用リスク量」, JAFEE 1998 夏季大会予稿集, 210-225
- [11] 松原望 (2010) 『ベイズ統計学概説 フィッシャーからベイズまで』 培風館
- [12] 安川武彦 (2002) 「平行性の仮定と格付けデータ：順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルによる分析」 統計数理 50 201-216
- [13] ランカスター, トニー (2011) 『ベイジアン計量経済学』 (小暮厚之・梶田幸作監訳) 朝倉書店
- [14] 和合肇 編著 (2005) 『ベイズ計量経済分析—マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』 東洋経済新報社
- [15] J.D. ハミルトン (2006) 『時系列解析 (上) 定常過程編』 (沖本竜義・井上智夫訳) シーエーピー出版
- [16] J.D. ハミルトン (2006) 『時系列解析 (下) 非定常/応用定常過程編』 (沖本竜義・井上智夫訳) シーエーピー出版
- [17] Albert, J. and S.Chib(1993):“Bayesian analysis of binary and polychotomous response data,”, *Journal of the American Statistical Association*,88,669-679.
- [18] Ederington, L. H. (1985):“Classification models and bond ratings”, *Financial Review*, 20, 237-262.
- [19] Geweke, J. (1992): “Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments,”*Bayesian Statistics*, ed. by J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid, and A. F. M. Smith, 169-193.
- [20] Horrigan, J. (1966) : “The determination of long-term credit standing with financial ratio,”, *Journal of Accounting Research*, 4, 44-62.
- [21] Jun S. Liu and Chiara Sabatti(2000): “Generalised Gibbs sampler and multigrid Monte

- Carlo for Bayesian computation ” *Biometrika*, 87, 2, 353–369.
- [22] Kaplan, R. S., and G. Urwitz(1979): “Statistical model of bond rating: A methodological inquiry,” *The Journal of Business*, 52, 231–261.
- [23] Koop, Gary:(2004)“Bayesian Econometrics,” John Wiley & Sons.
- [24] Koop, Gary, Dale J. Poirier, and Justin L.Tobias: (2007)“Bayesian Econometric Methods,” Cambridge university Press.
- [25] Lancaster, Tony:(2004)“Introduction to Modern Bayesian Econometrics,” Wiley-Blackwell.
- [26] Terza, J. V. (1985):“Ordinal Probit: A generalization”, *Comm. Statist. Theory Methods*, 14, 1–11.